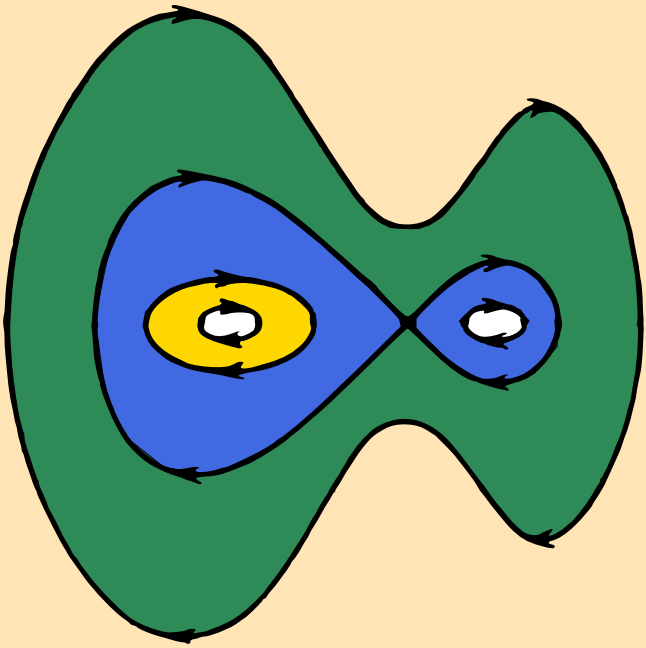
G. Kotkine, V. Serbo

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MÉCANIQUE CLASSIQUE



Éditions Mir Moscou

Г. Л. КОТКИН, В. Г. СЕРБО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1977

G. KOTKINE, V. SERBO

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MÉCANIQUE CLASSIQUE

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe par
OLEG PARTCHEVSKI

На французском языке

© Издательство «Наука» 1977 г. с изменениями
© Traduction française · Editions Mir · 1981

TABLE DES MATIÈRES

	PROBLÈMES	RÉPONSES ET SOLUTIONS
§ 1. Intégration d'équations de mouvement des systèmes à un degré de liberté	7	67
§ 2. Mouvement de particules dans des champs	9	77
§ 3. Section de diffusion dans un champ donné. Choc de particules	14	113
§ 4. Équations de mouvement. Lois de conservation	17	127
§ 5. Petites oscillations d'un système à un degré de liberté	24	143
§ 6. Petites oscillations de systèmes à plusieurs degrés de liberté	28	
§ 7. Oscillations de chaînes linéaires	38	157
§ 8. Oscillations non linéaires	41	208
§ 9. Mouvement du solide. Référentiels non galiléens	43	226 238
§ 10. Équations de Hamilton. Crochets de Poisson	49	260
§ 11. Transformations canoniques	53	269
§ 12. Équation de Hamilton-Jacobi	58	284
§ 13. Invariants adiabatiques	61	296
Bibliographie	308	

PROBLÈMES

§ 1. Intégration d'équations de mouvement des systèmes à un degré de liberté

1.1. Déterminer la loi de mouvement d'une particule dans le champ $U(x)$:

a) $U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ (potentiel de Morse, fig. 1, *a*);

b) $U(x) = -\dfrac{U_0}{\mathrm{ch}^2 \alpha x}$ (fig. 1, *b*);

c) $U(x) = U_0 \,\mathrm{tg}^2 \alpha x$ (fig. 1, *c*).

1.2. Rechercher la loi de mouvement d'une particule dans le champ $U(x) = -Ax^4$ au cas où son énergie est nulle.

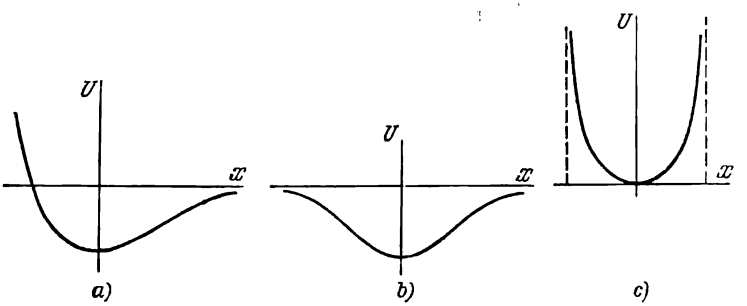


Fig. 1.

1.3. Déterminer de façon approchée la loi de mouvement d'une particule dans le champ $U(x)$ près du point de repos $x = a$ (fig. 2).

Conseil. Utiliser le développement de $U(x)$ en série de Taylor au voisinage du point $x = a$. Étudier les cas de $U'(a) \neq 0$, $U'(a) = 0$ et $U''(a) \neq 0$.

1.4. Déterminer la loi d'après laquelle la période de mouvement de la particule dans le champ représenté sur la figure 3 devient infinie quand l'énergie E se rapproche de U_m.

1.5. a) Établir la période de mouvement de la particule dans le champ $U(x)$ (fig. 4) au cas où son énergie est proche de U_m (c'est-à-dire pour $E - U_m \ll U_m - U_{\min}$).

b) Déterminer durant quelle partie de la période la particule se trouve sur le tronçon s'étendant de x à $x + dx$.

c) Déterminer durant quelle partie de la période la particule possède l'impulsion $m\dot{x}$ sur l'intervalle de p à $p + dp$.

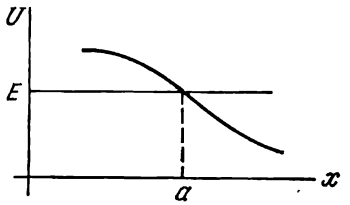


Fig. 2.

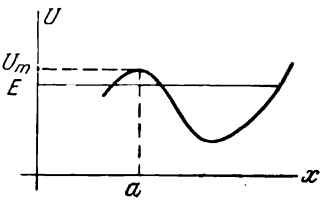


Fig. 3.

d) Tracer qualitativement sur le plan x, $p = m\dot{x}$ les lignes $E(x, p) = \text{const}$ aux cas où $E < U_m$, $E = U_m$, $E > U_m$.

1.6. Une particule de masse m est susceptible de se mouvoir sur un cercle de rayon l en position verticale dans le champ de gravité

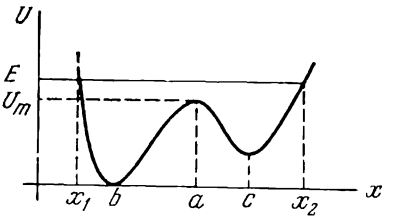


Fig. 4.

(pendule mathématique). Rechercher la loi de son mouvement au cas où l'énergie cinétique au point inférieur E est égale à $2mgl$.

Évaluer la période de révolution du pendule pour le cas où $E - 2mgl \ll 2mgl$.

1.7. Déterminer la loi de mouvement d'un pendule mathématique pour une valeur quelconque de l'énergie.

Conseil. La dépendance de l'écart angulaire du pendule du temps s'exprime au moyen de fonctions elliptiques (voir, par exemple, [1], p. 157).

1.8. Déterminer la variation de la loi de mouvement d'une particule sur un tronçon démuni de points d'arrêt engendrée par l'adjonction au champ $U(x)$ d'un petit complément $\delta U(x)$.

Étudier si les résultats obtenus sont applicables près du point d'arrêt.

1.9. Rechercher la variation de la loi de mouvement d'une particule engendrée par l'adjonction au champ $U(x)$ d'un petit

complément $\delta U(x)$:

a) $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, $\delta U(x) = \frac{m\alpha x^3}{3}$;

b) $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, $\delta U(x) = \frac{m\beta x^4}{4}$.

1.10. Déterminer la variation de la période du mouvement fini de la particule, due à l'adjonction au champ $U(x)$ d'un petit complément $\delta U(x)$.

1.11. Rechercher la variation de la période de mouvement de la particule, due à l'adjonction au champ $U(x)$ d'un petit complément $\delta U(x)$:

a) $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ (oscillateur harmonique), $\delta U(x) = \frac{m\beta x^4}{4}$;

b) $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$, $\delta U(x) = \frac{m\alpha x^3}{3}$;

c) $U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$, $\delta U(x) = -Ve^{\alpha x}$ $(V \ll A)$.

1.12. Une particule se meut dans le champ $U(x) = \frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$ avec l'énergie $E > U_0$. Rechercher le temps de retard de la particule au cours de son mouvement de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ sur le temps du mouvement libre avec la même énergie.

§ 2. Mouvement de particules dans des champs

2.1. Décrire de façon qualitative la nature du mouvement d'une particule dans le champ $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}$ pour des valeurs variées du moment cinétique et de l'énergie.

2.2. Rechercher les trajectoires et les lois de mouvement de la particule dans le champ

$$U = \begin{cases} -V & \text{avec } r < R, \\ 0 & \text{avec } r > R \end{cases}$$

(fig. 5, « puits de potentiel rectangulaire sphérique ») pour des valeurs variées du moment et de l'énergie.

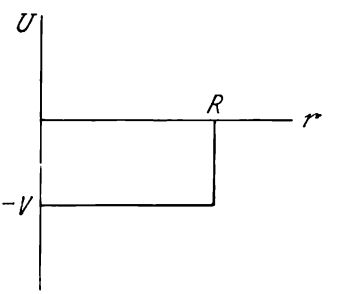


Fig. 5.

2.3. Déterminer la trajectoire de la particule dans le champ $U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$. Exprimer la variation de direction de sa vitesse, due à la diffusion, en fonction de l'énergie et du moment.

2.4. Déterminer la trajectoire de la particule dans le champ $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$. Calculer la durée de chute de la particule de la

distance r au centre du champ. Combien de révolutions accomplira dans ce mouvement la particule?

2.5. Déterminer la trajectoire de la particule dans le champ $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$. Rechercher la distance angulaire $\Delta\varphi$ entre deux passages successifs par le périhélie (point $r = r_{\min}$), la période des oscillations radiales T_r et celle de révolution T_φ. A quelle condition la trajectoire devient-elle fermée?

2.6. Déterminer la trajectoire de la particule dans le champ $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$.

2.7. Pour quelles valeurs du moment cinétique M le mouvement fini de la particule est-il possible dans le champ $U(r)$?

a) $U(r) = -\alpha e^{-\varkappa r}/r$;

b) $U(r) = -Ve^{-\varkappa^2 r^2}$.

2.8. Une particule chute au centre du champ $U(r) = -\alpha r^{-n}$ d'une distance finie. Le nombre de révolutions effectuées par la particule autour du centre sera-t-il fini? La durée de chute sera-t-elle finie? Rechercher l'équation de la trajectoire pour des r petits.

2.9. Une particule parcourant le champ $U(r)$ se dirige vers l'infini de la distance $r \neq 0$. Le nombre de révolutions accomplies par cette dernière autour du centre sera-t-il fini?

a) $U = \alpha r^{-n}$;

b) $U(r) = -\alpha r^{-n}$.

2.10. Déterminer la durée de chute de la particule de la distance R au centre du champ $U(r) = -\alpha/r$, en assimilant la trajectoire à une ellipse dégénérée. La vitesse initiale de la particule est nulle.

2.11. Déterminer la distance minimale à laquelle s'approche une particule incidente provenant de l'infini, qui se meut à la vitesse v et dont le paramètre d'impact est ρ, d'une particule se trouvant primitivement au repos. Les masses des particules sont m_1 et m_2, la loi de leur interaction étant $U(r) = \alpha/r^n$.

2.12. Déterminer dans un système de centre des masses les trajectoires du mouvement fini de deux particules dont les masses sont m_1 et m_2 et la loi d'interaction $U(r) = -\alpha/r$.

2.13. Déterminer la position du foyer d'un faisceau de particules se disposant près de l'axe de ce dernier au cas de diffusion dans le champ central $U(r)$, en admettant que la particule longeant l'axe rebrousse chemin.

2.14. Rechercher la région inaccessible au faisceau de particules provenant de l'infini et animées de la vitesse v parallèle à l'axe z, pour le cas où elles sont diffusées par le champ $U(r) = \alpha/r$.

2.15. Rechercher la région inaccessible aux particules animées de la vitesse v et se dispersant en diverses directions d'un point A situé dans le champ $U(r) = -\alpha/r$.

2.16. Rechercher la trajectoire de la particule dans le champ $U(r) = -\alpha/r$ en se servant de l'intégrale de mouvement $\mathbf{A} = [\mathbf{v}\mathbf{M}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$.

2.17. Déterminer la variation de dépendance de la période T d'oscillations radiales d'un point situé dans le champ central $U(r)$ de l'énergie et du moment, engendrée par la modification du champ d'une petite quantité $\delta U(r)$.

2.18. Montrer que la trajectoire d'une particule plongée dans le champ $U(r) = -\alpha e^{-r/D}/r$ constitue, à la condition que $r_{\max} \ll D$, une ellipse en lente précession et trouver la vitesse angulaire de cette précession.

2.19 Rechercher la vitesse de la précession de l'orbite dans le champ $U(r) = -\alpha/r^{1+\varepsilon}$, où $|\varepsilon| \ll 1$.

2.20 Rechercher la vitesse angulaire de la précession de l'orbite d'une particule dans le champ $U = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \frac{\beta}{r^4}$ pour $\beta \ll m\omega^2 a^6$, $m\omega^2 b^6$, où a et b sont les paramètres de la trajectoire non perturbée :

$$\left(\frac{r\cos\varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{r\sin\varphi}{b}\right)^2 = 1.$$

2.21. Montrer que l'énergie potentielle du système Terre-Lune dans le champ du Soleil, réduite à la moyenne mensuelle, prend la forme $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^3}$ (r étant la distance du centre des masses du système Terre-Lune au Soleil ; à des fins de simplification, admettons que le plan de l'orbite de la Lune coïncide avec celui de l'orbite de la Terre). Déterminer le déportement résultant du périhélie en cent ans. La masse de la Lune est 81 fois plus petite que celle de la Terre, la distance jusqu'à la Lune vaut $a = 380\,000$ km, la distance moyenne au Soleil vaut 150 millions de km.

2.22. Déterminer la vitesse angulaire de la précession de l'orbite dans le champ $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r)$ pour le cas où l'excentricité de l'orbite $e \ll 1$, en posant

$$\delta U(r) = \delta U(a) + (r-a)\,\delta U'(a) + \frac{1}{2}(r-a)^2\,\delta U''(a),$$

où $a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$ est le rayon moyen de l'orbite.

2.23. Déterminer la vitesse angulaire de la précession de l'orbite d'une particule dans le champ $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r)$ ($\delta U(r) -$

petite adjonction) avec la précision jusqu'au second ordre inclus en $\delta U(r)$ près.

2.24. Rechercher l'équation de la trajectoire d'une particule parcourant un champ $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\gamma}{r^3}$ en assimilant $\frac{\gamma}{r^3}$ à une petite adjonction au champ coulombien.

2.25. Montrer que le problème du mouvement de deux particules chargées dans un champ électrique uniforme $\mathfrak{E}$ se ramène à celui du mouvement du centre des masses et du mouvement de la particule dans un champ donné.

2.26. A quelle condition le problème du mouvement du centre des masses et celui du mouvement relatif de deux particules chargées dans un champ magnétique uniforme diffèrent-ils l'un de l'autre?

Il est commode de choisir le potentiel vectoriel sous la forme

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathfrak{H}\mathbf{r}].$$

2.27. Exprimer l'énergie cinétique, l'impulsion et le moment cinétique du système de N particules en fonction de coordonnées de Jacobi

$$\xi_n = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n} - \mathbf{r}_{n+1} \; (n = 1, \ldots, N-1),$$

$$\xi_N = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + \ldots + m_N}.$$

2.28. Une particule primitivement au repos est frappée par une particule incidente de même masse m possédant à l'infini la vitesse v et interagissant avec la première suivant la loi $U(r) = \alpha/r^n$. Le choc est central. Rechercher le point d'arrêt de la particule incidente.

2.29 Démontrer que pour une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme $\mathfrak{H}$ l'intégrale de mouvement est $\mathbf{M}\mathfrak{H} + \frac{e}{2c}[\mathbf{r}\mathfrak{H}]^2$, où $\mathbf{M} = m[\mathbf{rv}]$.

2.30. Rechercher la trajectoire et la loi de mouvement d'une particule chargée plongée dans le champ magnétique $\mathfrak{H} = g\mathbf{r}/r^3$ (champ du monopôle magnétique).

Un tel champ s'observe pour le champ magnétique d'un long solénoïde en des points situés de ses extrémités à une distance supérieure au diamètre du solénoïde mais petite devant sa longueur.

2.31. Décrire qualitativement la nature du mouvement ainsi que la forme de la trajectoire d'une particule chargée plongée dans le champ d'un dipôle magnétique $\mathbf{m}$ et qui se meut dans le plan perpendiculaire au vecteur $\mathbf{m}$. Le potentiel vecteur du dipôle magnétique vaut $\mathbf{A} = [\mathbf{mr}]/r^3$.

2.32. a) Décrire qualitativement le mouvement d'une particule chargée dans le champ $U = \frac{1}{2}m\lambda r^2$, où r est la distance de l'axe z

(champ d'un cylindre uniformément chargé), en présence d'un champ magnétique uniforme $\mathcal{H}$ parallèle à l'axe z.

b) Rechercher la loi de mouvement et la trajectoire de la particule chargée parcourant le champ $U = \alpha/r^2$ suivant le plan perpendiculaire au champ magnétique uniforme constant $\mathcal{H}$.

2.33. Une particule chargée se meut dans un champ coulombien $U(r) = -\alpha/r$ suivant un plan perpendiculaire au champ magnétique uniforme $\mathcal{H}$. Décrire la trajectoire de la particule. Étudier le cas où $\mathcal{H}$ est petit et le cas où le champ $U(r)$ constitue une petite perturbation.

2.34. Rechercher les lois de mouvement de deux particules chargées identiques dans un champ magnétique uniforme $\mathcal{H}$ au cas où leurs trajectoires sont dans un même plan perpendiculaire à $\mathcal{H}$ quand leur énergie d'interaction $U(r) = e^2/r$ peut être assimilée à une petite correction.

2.35 Montrer que dans le champ $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \mathbf{Fr}$ la quantité $\mathbf{F}[\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{Fr}}{r} + \frac{1}{2}[\mathbf{Fr}]^2$ se conserve. Commenter cette intégrale de mouvement pour des $\mathbf{F}$ très petits.

2.36. Étudier la conséquence d'une petite adjonction $\delta U(\mathbf{r}) = -\mathbf{Fr}$ au champ coulombien quand le mouvement de la particule est fini.

a) Rechercher la vitesse moyenne (durant une période) de variation du moment cinétique.

b) Déterminer la dépendance temporelle du moment cinétique, des dimensions et de l'orientation de l'orbite au cas où la force $\mathbf{F}$ est située dans le plan de l'orbite.

c) Même question pour le cas d'une orientation quelconque de la force.

Conseil. Établir et résoudre les équations de mouvement, moyennes sur une période, pour des vecteurs $\mathbf{M} = m[\mathbf{rv}]$ et $\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$.

2.37. Rechercher la variation systématique de la trajectoire du mouvement fini d'une particule chargée plongée dans un champ $U(r) = -\alpha/r$ et soumise constamment à l'influence de faibles champs uniformes électrique et magnétique $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$.

a) Se limiter au cas où le champ magnétique est perpendiculaire au plan de l'orbite, tandis que le champ électrique est situé dans ce plan.

b) Étudier le cas général.

2.38. Rechercher les variations systématiques de l'orbite elliptique d'une particule dans le champ $U(r) = -\alpha/r$, soumise à l'influence d'une petite adjonction $\delta U = \beta r^2 (3\cos^2\theta - 1)$. (Tel est, par exemple, le champ d'attraction moyen sur un mois de la Lune

dans l'espace circumterrestre, c'est-à-dire le champ de « forces de marées »). Se limiter au cas où le plan de l'orbite passe par l'axe z.

2.39. Rechercher le déportement systématique de la trajectoire d'un mouvement fini de la particule se déplaçant dans le champ $U = -\alpha/r$ et dans celui du dipôle magnétique $\mathbf{m}$ au cas où l'influence du dipôle magnétique peut être assimilée à une petite perturbation. Choisir le potentiel vecteur sous la forme $\frac{[\mathbf{mr}]}{r^3}$.

2.40. Déterminer la vitesse moyenne de la précession de l'orbite d'une particule dans le champ $U(r) = -\alpha/r$ sous l'action d'une petite force complémentaire $\mathbf{F} = \beta\ddot{\mathbf{v}}$ (c'est la forme que prend la force de freinage due au rayonnement, dans ce cas $\beta = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}$, où q est la charge de la particule (voir [2], § 75).

§ 3. Section de diffusion dans un champ donné. Choc de particules

3.1. Rechercher la section efficace différentielle de la diffusion de particules, dont la vitesse avant la diffusion est parallèle à l'axe z, sur une surface de révolution lisse et élastique $\rho(z)$:

a) $\rho = b \sin \frac{z}{a}$, $\quad 0 \leqslant z \leqslant \pi a$;

b) $\rho = Az^n$, $\quad 0 < n < 1$;

c) $\rho = b - \frac{a^2}{z}$, $\quad \frac{a^2}{b} \leqslant z < \infty$.

3.2. Rechercher la surface de révolution pour laquelle la section de diffusion efficace coïncide avec celle de Rutherford.

3.3. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de particules au moyen de la « colline de potentiel » sphérique:

$$U(r) = \begin{cases} V & \text{pour } r < a, \\ 0 & \text{pour } r > a. \end{cases}$$

3.4. Rechercher la section de chute des particules au centre du champ:

a) $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$;

b) $U(r) = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}$.

3.5. Rechercher la section de chute des particules sur une bille de rayon R située au centre du champ $U(r)$:

a) $U = -\frac{\alpha}{r^n}$, $\quad n \geqslant 2$;

b) $U = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}$.

3.6. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de particules dans le champ $U(r)$:

a) $U(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{R} & \text{pour } r < R, \\ 0 & \text{pour } r > R; \end{cases}$

b) $U(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} m\omega^2 (r^2 - R^2) & \text{pour } r < R, \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$

3.7. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de particules rapides ($E \gg V$) dans le champ $U(r)$:

a) $U(r) = V \ln\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$;

b) $U(r) = \begin{cases} V\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{pour } r < R, \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$

3.8. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de particules à petits angles dans le champ $U(r) = \frac{\beta}{r^4} - \frac{\alpha}{r^2}$.

3.9. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de particules dans le champ $U = -\alpha/r^2$.

3.10. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de particules rapides ($E \ll V$) dans le champ $U(r)$. Examiner en détail les cas limites, quand l'angle de déviation est proche de ses valeurs minimale et maximale:

a) $U(r) = Ve^{-\varkappa^2 r^2}$;

b) $U(r) = \frac{V}{1 + \varkappa^2 r^2}$.

3.11. Un flux de particules dont les vitesses sont primitivement parallèles à l'axe z est diffusé sur un ellipsoïde immobile

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rechercher la section efficace différentielle de diffusion pour le cas où l'ellipsoïde est:

a) lisse et élastique, b) lisse et inélastique, c) rugueux et élastique.

3.12. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de particules à petits angles dans un champ non central $U(\mathbf{r})$:

a) $U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^2}$;

b) $U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^3}$.

3.13. Rechercher la correction à la section efficace différentielle de diffusion de particules dans le champ $U(r)$ impliquée par la variation du champ d'une petite quantité $\delta U(r)$:

a) $U(r) = \frac{\alpha}{r}$, $\delta U(r) = \frac{\beta}{r^2}$;

b) $U(r) = \frac{\alpha}{r}$, $\delta U(r) = \frac{\gamma}{r^3}$;

c) $U(r) = \frac{\beta}{r^2}$, $\delta U(r) = \frac{\gamma}{r^3}$.

3.14. Déterminer la moyenne prise sur le temps de la section efficace différentielle de diffusion en fonction de l'énergie acquise par les particules rapides ($E \gg V_{1,2}$) avec la diffusion dans le champ $U(r, t) = (V_1 + V_2 \sin \omega t)\, e^{-\varkappa^2 r^2}$.

3.15. Une particule lancée avec une vitesse V se scinde en deux particules identiques. Déterminer la répartition suivant l'angle de divergence des particules de désintégration (angle formé par les directions prises par les deux particules). La désintégration dans le système du centre des masses est isotrope, la vitesse des particules de désintégration dans le système du centre des masses est égale à v_0.

3.16. Trouver la répartition des particules de désintégration en énergies dans un système de laboratoire si dans le système de centre des masses la répartition angulaire est de la forme $\frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta_0\, do_0$, où θ_0 est l'angle formé par la vitesse $\mathbf{V}$ de la particule incidente et la direction prise par la particule de désintégration dans le système de centre des masses. La vitesse des particules de désintégration dans le système de centre des masses vaut v_0.

3.17. L'électron possédant à l'infini la vitesse v est lancé sur un autre électron au début immobile (le paramètre d'impact est ρ). Rechercher les vitesses des électrons après diffusion.

3.18. Déterminer l'intervalle des valeurs que peut prendre l'angle entre les directions des vitesses après collision de la particule mobile (masse m_1) avec la particule initialement au repos (masse m_2).

3.19. Rechercher la section efficace différentielle de diffusion de sphères lisses et inélastiques sur des sphères identiques se trouvant primitivement au repos.

3.20. Trouver la loi suivant laquelle varie l'intensité du faisceau de particules à la traversée du domaine plein de centres absorbants. La densité de distribution des centres est n, la section d'absorption étant σ.

3.21. Rechercher le nombre d'événements de réaction se réalisant dans le volume dV durant le laps de temps dt avec la collision de deux faisceaux de particules animées de vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et dont les densités sont n_1 et n_2. La section de réaction est σ.

3.22. La particule de masse M se meut dans un domaine rempli de particules de masse $m \ll M$ (initialement immobiles). La section de diffusion des particules m sur la particule M vaut $d\sigma = f(\theta)\, do$. Les chocs sont élastiques. Trouver:

a) la « force de frottement » agissant sur la particule M;

b) le carré moyen de l'angle de déviation Θ de la particule M.

§ 4. Équations de mouvement. Lois de conservation

4.1. Durant le laps de temps τ la particule se déplace dans le champ $U(x) = -Fx$ du point $x = 0$ au point $x = a$. Rechercher la loi de mouvement de la particule en supposant qu'elle est de la forme $x(t) = At^2 + Bt + C$ et en choisissant les paramètres A, B, C de manière à réduire au maximum l'action.

4.2. Une particule se meut sur le plan xOy dans le champ

$$U(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0, \\ V & \text{pour } x > 0, \end{cases}$$

et se déplace durant le laps de temps τ du point $(-a, 0)$ au point (a, a). Rechercher la loi de mouvement de la particule en posant qu'elle prend la forme

$$x_{1,2}(t) = A_{1,2}t + B_{1,2},$$

$$y_{1,2}(t) = C_{1,2}t + D_{1,2}.$$

Les chiffres 1 et 2 se rapportent aux demi-plans gauche ($x < 0$) et droit ($x > 0$).

4.3. A l'aide d'un calcul direct, démontrer la covariance des équations de Lagrange par rapport à la transformation des coordonnées

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_s, t), \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

4.4. Quelle transformation doit subir la fonction de Lagrange avec le passage aux nouvelles coordonnées et au « temps » nouveau

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \ldots, Q_s, \tau), \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

$$t = t(Q_1, Q_2, \ldots, Q_s, \tau),$$

pour que l'équation de Lagrange conserve sa forme?

4.5. Écrire la fonction de Lagrange et l'équation de mouvement de la particule dans le champ $U(x)$ en introduisant le « temps local » $\tau = t - \lambda x$.

4.6. Comment se transforme la fonction de Lagrange

$$L = -\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

avec le passage aux coordonnées q et au « temps » τ :

$$x = q \operatorname{ch} \lambda + \tau \operatorname{sh} \lambda,$$
$$t = q \operatorname{sh} \lambda + \tau \operatorname{ch} \lambda?$$

4.7. Trouver les lois de transformation de l'énergie et des impulsions généralisées avec la transformation des coordonnées

$$q_i = f_i (Q_1, \ldots, Q_s, t), \quad i = 1, \ldots, s.$$

4.8. Trouver les lois de transformation de l'énergie et des impulsions généralisées conjuguées aux coordonnées polaires et cartésiennes avec le passage au système de référence en rotation autour de l'axe z :

a) $\varphi = \varphi' + \Omega t, \quad r = r'$;

b) $x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t.$

4.9. Trouver les lois de transformation de l'énergie et des impulsions avec le passage au système de référence se déplaçant à la vitesse $\mathbf{V}$. La fonction de Lagrange L' dans le système mobile sera prise sous la forme :

a) $L'_1 = L (\mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{V}, t)$, où $L (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ est la fonction de Lagrange dans le système au repos ;

b) $L'_2 = \frac{m\mathbf{v}'^2}{2} - U (\mathbf{r}' + \mathbf{V}t, t)$. L'_2 diffère ici de L'_1 de la dérivée totale par rapport au temps de la fonction

$$\mathbf{V}m\mathbf{r}' + \frac{m}{2} \mathbf{V}^2 t.$$

4.10. Soit une transformation infiniment petite de coordonnées et du temps de la forme

$$q'_i = q_i + \varepsilon \Psi_i (q, t),$$
$$t' = t + \varepsilon X (q, t), \quad \varepsilon \to 0,$$

et soit, cette transformation étant adoptée, la forme inchangée de l'action :

$$\int_{t_1}^{t_2} L \left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} L \left(q', \frac{dq'}{dt'}, t'\right) dt'.$$

Démontrer que la grandeur

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i X - \Psi_i) - LX$$

est l'intégrale de mouvement.

4.11. Appliquer le théorème du problème précédent au cas où la forme de l'action se modifie avec la transformation des coordonnées et du temps de la façon suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt = \int_{t_1'}^{t_2'} \left\{L\left(q', \frac{dq'}{dt'}, t'\right) + \varepsilon \frac{df(q', t')}{dt'}\right\} dt'.$$

4.12. Rechercher les intégrales de mouvement pour le cas où la forme de l'action ne varie pas avec :

a) un déplacement dans l'espace, b) une rotation, c) un déplacement de l'origine des temps, d) un déplacement hélicoïdal, e) une transformation du type posé au problème 4.6.

4.13. Trouver les intégrales de mouvement d'une particule mobile :

a) dans le champ uniforme $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}\mathbf{r}$;

b) dans le champ $U(\mathbf{r})$, où $U(\mathbf{r})$ est une fonction homogène :

$$U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$$

(préciser pour quel n la transformation de similitude ne modifie pas la forme de l'action) ;

c) dans le champ de l'onde progressive $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$, où $\mathbf{V}$ est un vecteur constant ;

d) dans un champ magnétique déterminé par le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, où $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est une fonction homogène ;

e) dans un champ électromagnétique tournant à la vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe z.

4.14. Trouver l'intégrale de mouvement répondant à la transformation de Galilée.

Conseil. Utiliser les résultats du problème 4.11.

4.15. Rechercher les intégrales de mouvement d'une particule plongée dans le champ magnétique uniforme $\mathfrak{H}$ au cas où le potentiel vecteur est donné sous la forme :

a) $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathfrak{H}\mathbf{r}]$; b) $A_x = A_z = 0, \quad A_y = x\mathscr{H}$.

4.16. Rechercher les intégrales de mouvement d'une particule dans le champ :

a) du dipôle magnétique $\mathbf{A} = [\mathbf{m}\mathbf{r}]/r^3$, $\mathbf{m} = \text{const}$;

b) pour $A_\varphi = \mu/r$, $A_r = A_z = 0$.

4.17. Établir les équations de mouvement d'un système dont la fonction de Lagrange est :

a) $L(x, \dot{x}) = e^{-x^2-\dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{-x^2}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}\,dy$;

b) $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$.

4.18. a) Écrire les composantes du vecteur accélération de la particule dans le système de coordonnées sphériques.

b) Trouver les composantes de l'accélération dans le système de coordonnées orthogonal q_i pour le cas où l'élément de longueur est donné par la relation

$$ds^2 = h_1^2\, dq_1^2 + h_2^2\, dq_2^2 + h_3^2\, dq_3^2,$$

où $h_i\,(q_1, q_2, q_3)$ sont des coefficients de Lamé.

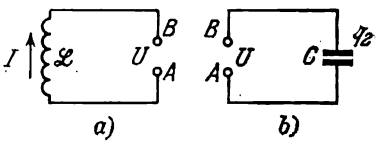


Fig. 6.

4.19. Écrire les équations de mouvement d'une particule en coordonnées arbitraires q_i reliées aux coordonnées cartésiennes x_i par les relations :

a) $x_i = x_i\,(q_1, q_2, q_3), \quad i = 1, 2, 3;$

b) $x_i = x_i\,(q_1, q_2, q_3, t), \quad i = 1, 2, 3.$

4.20. Montrer que la fonction de Lagrange [31]

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) - \frac{eg}{c}\,\dot{\varphi}\cos\theta$$

décrit le mouvement d'une particule chargée plongée dans le champ magnétique $\mathfrak{H} = gr/r^3$ (voir problème 2.30).

Trouver les intégrales de mouvement.

4.21. Vérifier que les fonctions de Lagrange

$$L_1 = \frac{\mathscr{L}\dot{q}_1^2}{2} - Uq_1, \quad L_2 = -\frac{q_2^2}{2C} + Uq_2$$

aboutissent aux « équations de mouvement » correctes pour q_1 et q_2 ainsi qu'à des valeurs exactes de l'énergie. $\dot{q}_1 = I$ est ici le courant se passant par l'inductance $\mathscr{L}$ de A vers B (fig. 6, *a*), q_2 la charge de l'armature supérieure du condensateur (fig. 6, *b*), tandis que U est la tension entre les points A et B ($U = \varphi_B - \varphi_A$).

4.22. En profitant de l'additivité de la fonction de Lagrange et du résultat obtenu au problème précédent, construire les fonctions et les équations de Lagrange pour les circuits représentés sur la figure 7 (*a*, *b* et *c*).

4.23. Rechercher les fonctions de Lagrange des systèmes suivants :

a) un circuit comprenant un condensateur variable dont les armatures mobiles sont reliées au pendule m (fig. 8, a). La dépen-

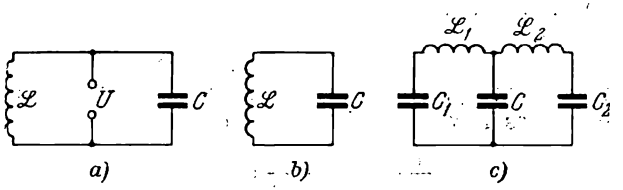


Fig. 7

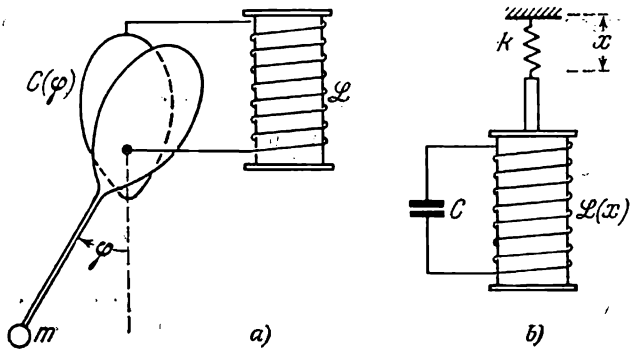


Fig. 8

dance de la capacité de l'angle de rotation C (φ) est connue, la masse des armatures pouvant être négligée ;

b) un noyau magnétique suspendu à un ressort de rigidité k s'enfonce à l'intérieur d'un solénoïde dont l'inductance est une fonction fixée du déplacement du noyau $\mathcal{L}(x)$ (fig. 8, b).

4.24. Un cadre carré de conductibilité idéale peut tourner autour de son côté fixe $AB = a$ (fig. 9). Le cadre est plongé dans un champ magnétique uniforme constant $\mathcal{H}$ perpendiculaire à l'axe AB. L'inductance du cadre est $\mathcal{L}$, la masse du côté CD vaut m, les masses des autres côtés peuvent être négligées.

Décrire qualitativement la nature du mouvement accompli par le cadre.

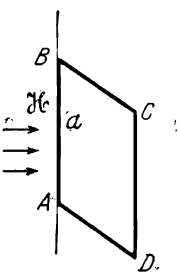


Fig. 9

4.25. En utilisant la méthode de facteurs indéterminés de Lagrange, établir les équations de mouvement d'une particule dans le champ de gravité, au cas où cette dernière est susceptible de parcourir la courbe donnée :

a) la parabole située dans le plan vertical ;

b) le cercle de rayon $r = l$, situé dans le plan vertical.

Exprimer les forces de liaison.

4.26. Une particule se déplace dans le champ de gravité suivant une droite en rotation uniforme dans le plan vertical. Établir les équations de mouvement de la particule et trouver le moment de la force de liaison.

4.27. On peut décrire l'influence des liaisons et du frottement sur le mouvement d'un système par l'introduction dans les équations de mouvement des forces de liaison et de frottement généralisées:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=R_i.$$

a) Comment variera avec le temps l'énergie du système?

b) Comment se transformeront les forces R_i avec le passage aux nouvelles coordonnées généralisées

$$q_i = q_i\,(Q_1, \ldots, Q_s, t),$$

pour que les équations de mouvement conservent leur forme?

4.28. Soient les équations de liaison de la forme

$$\dot{q}_\beta=\sum_{n=r+1}^{s} b_{\beta n}\dot{q}_n, \quad \beta=1, \ldots, r,$$

la fonction de Lagrange $L\,(q_{r+1}, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$ et les coefficients $b_{\beta n}$ ne dépendant pas des coordonnées q_β.

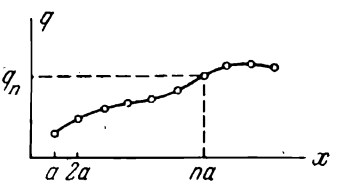


Fig. 10

Montrer que les équations de mouvement peuvent être établies sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_n}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_n}+\sum_{\beta=1}^{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\sum_{m=r+1}^{s}\left(\frac{\partial b_{\beta m}}{\partial q_n}-\frac{\partial b_{\beta n}}{\partial q_m}\right)\dot{q}_m=0,$$

où $\tilde{L}\,(q_{r+1}, \ldots, q_s, \dot{q}_{r+1}, \ldots, \dot{q}_s, t)$ est une fonction obtenue par élimination des vitesses $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_r$ de L au moyen des équations de liaison.

4.29. Une corde peut être assimilée au cas limite d'un système de N particules (fig. 10) reliées par un fil élastique, quand $N \to \infty$, $a \to 0$, $Na =$ const. La fonction de Lagrange d'un système discon-

tinu prend la forme

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N, t) = \sum_{n=1}^{N+1} L_n(q_n, q_n - q_{n-1}, \dot{q}_n, t),$$

où q_n est l'écartement de la n-ième particule de la position d'équilibre.

a) Établir l'équation de mouvement d'un système continu en l'assimilant au cas limite des équations de Lagrange d'un système discontinu.

b) Obtenir l'expression de l'énergie d'un système continu comme limite de l'expression de l'énergie d'un système discontinu.

Conseil. Introduire la coordonnée du point x de la corde, ainsi que les grandeurs obtenues en passant à la limite $a \to 0$ et $n = x/a \to \infty$:

$$q(x, t) = \lim q_n(t), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \lim \frac{q_n(t) - q_{n-1}(t)}{a},$$

$$\mathscr{L}\left(x, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial t}, t\right) = \lim \frac{L_n(q_n, q_n - q_{n-1}, \dot{q}_n, t)}{a}.$$

4.30. Une particule chargée se meut dans le champ de potentiel $U(\mathbf{r})$ et le champ magnétique constant $\mathfrak{H}(\mathbf{r})$, $U(\mathbf{r})$ et $\mathfrak{H}(\mathbf{r})$ étant des fonctions homogènes de coordonnées de degré k et n respectivement, c'est-à-dire que $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^k U(\mathbf{r})$, $\mathfrak{H}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n \mathfrak{H}(\mathbf{r})$. En déduire pour le système la règle de similitude, en précisant pour quelle valeur de n elle joue.

4.31. Appliquer le théorème du viriel au système de particules chargées plongé dans un champ magnétique uniforme $\mathfrak{H}$. L'énergie potentielle du système U est une fonction homogène de coordonnées $U(\alpha\mathbf{r}_1, \ldots, \alpha\mathbf{r}_s) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_s)$, tandis que le mouvement du système se réalise dans un domaine de l'espace aux vitesses limitées.

4.32. Trois particules identiques se déplacent sur une même droite et interagissent mutuellement deux à deux suivant la loi $U_{ik} = U(x_i - x_k)$, où x_i est la coordonnée de la i-ième particule. Vérifier qu'outre les intégrales de mouvement triviales

$$P = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3),$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + U_{12} + U_{23} + U_{31}$$

il existe une intégrale de mouvement supplémentaire [28]

$$A = m\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3 - \dot{x}_1 U_{23} - \dot{x}_2 U_{31} - \dot{x}_3 U_{21}$$

au cas où la fonction $U(x)$ prend la forme :

a) $U(x) = \dfrac{g^2}{x^2}$, b) $U(x) = \dfrac{g^2 a^2}{\operatorname{sh}^2 ax}$.

4.33. Étudier la collision de trois particules décrites au problème précédent. Soit $x_1 > x_2 > x_3$ et, quand $t \to -\infty$, les distances entre les particules deviennent infiniment grandes, tandis que leurs vitesses $v_i = \dot{x}_i\ (t = -\infty)$ sont telles que $v_3 > v_2 > v_1$. Trouver $v_i' = \dot{x}_i\ (t = +\infty)$.

§ 5. Petites oscillations d'un système à un degré de liberté

5.1. Trouver la pulsation ω de petites oscillations des particules dans le champ $U(x)$:

a) $U(x) = V \cos \alpha x - Fx$;

b) $U(x) = V(\alpha^2 x^2 - \sin^2 \alpha x)$

5.2. Rechercher la pulsation de petites oscillations du système représenté sur la figure 11. Le système est en rotation dans un champ de gravité autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire Ω.

5.3. Une particule de masse m portant une charge q peut se mouvoir dans le champ de gravité sur un cercle vertical de rayon R.

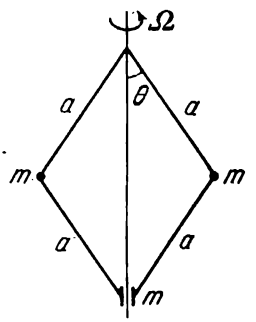


Fig. 11

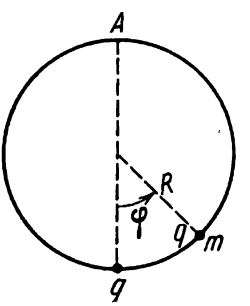


Fig. 12

Au point inférieur du cercle est fixée une charge q. Trouver la position d'équilibre ainsi que la pulsation de petites oscillations de la particule (fig. 12.)

5.4. Rechercher la loi de mouvement d'une particule dans le champ central $U(r) = -\alpha/r^n$ $(0 < n < 2)$ suivant une trajectoire voisine du cercle.

5.5. Rechercher la fréquence de petites oscillations d'un pendule sphérique (une particule de masse m est suspendue par un fil de longueur l) pour lesquelles l'angle d'écartement du fil de la verticale θ oscille au voisinage de la valeur θ_0.

5.6. Trouver la correction à apporter à la pulsation des petites oscillations de la molécule biatomique, impliquée par l'existence d'un moment cinétique de la particule M.

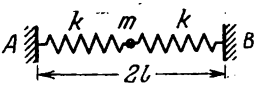


Fig. 13

5.7. Rechercher les oscillations libres du système (fig. 13) au cas où la particule peut se mouvoir:

a) le long de la droite AB;

b) perpendiculairement à AB.

Quelle est la dépendance de la pulsation de la tension de petits ressorts en position d'équilibre?

5.8. Rechercher les oscillations libres d'un système (fig. 14) si ce dernier est situé dans un champ de gravité uniforme, la particule ne pouvant se mouvoir que verticalement.

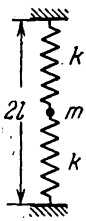


Fig. 14

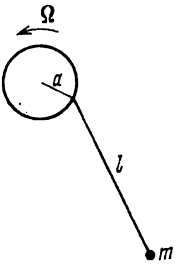


Fig. 15

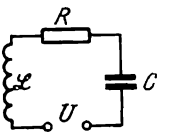


Fig. 16

5.9. Rechercher les petites oscillations permanentes d'un pendule plat dont le point de suspension se meut uniformément sur un cercle de rayon a et de pulsation Ω (fig. 15). La longueur du pendule est l ($l \gg a$).

5.10. Rechercher les oscillations permanentes de la tension d'un condensateur de même que le courant dans le circuit dont la source de tension est $U(t) = U_0 \sin \omega t$ (fig. 16).

5.11. Trouver la loi de mouvement d'un oscillateur amorti qui, à l'origine, se trouvait au repos, soumis à l'action de la force $F(t) = F \cos \gamma t$.

5.12. Déterminer l'énergie E acquise par un oscillateur sous l'action de la force $F(t) = Fe^{(-t/\tau)^2}$ durant le temps de son action, si pour $t = -\infty$:

a) l'oscillateur était au repos;

b) l'amplitude des oscillations était égale à a.

5.13. Trouver le mouvement provoqué par l'action de la force $F(t)$:

a) d'un système instable décrit par l'équation

$$\ddot{x} - \mu^2 x = \frac{1}{m} F(t);$$

b) d'un oscillateur amorti

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t).$$

5.14. Rechercher la section efficace différentielle d'un oscillateur isotrope forcé jusqu'à l'énergie ε par une particule rapide ($E \gg V$) qui interagit avec ce dernier suivant la loi

$$U(r) = Ve^{-\varkappa^2 r^2}.$$

L'énergie initiale de l'oscillateur est nulle.

5.15. L'oscillateur ne peut osciller que sur l'axe z. Rechercher la section efficace différentielle d'excitation de l'oscillateur jusqu'à l'énergie ε par une particule rapide qui interagit avec l'oscillateur suivant la loi $U(r) = Ve^{-\varkappa^2 r^2}$. La vitesse de la particule $\mathbf{v}_\infty$ est parallèle à l'axe z, son énergie $E \gg V$. L'énergie initiale de l'oscillateur est ε_0.

5.16. Un oscillateur harmonique est soumis à la force $F(t)$ avec $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = F_0$. Trouver l'énergie $E(+\infty)$ acquise par l'oscillateur durant l'action de la force, ainsi que l'amplitude de ses oscillations pour $t \to +\infty$, si pour $t \to -\infty$ l' oscillateur était au repos.

5.17. Rechercher l'énergie acquise par l'oscillateur sous l'action de la force

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{F_0}{2} e^{\lambda t} & \text{pour } t < 0, \\ \dfrac{F_0}{2}(2 - e^{-\lambda t}) & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

L'énergie de l'oscillateur est E_0 pour $t \to -\infty$.

5.18. Apprécier la variation de l'amplitude des oscillations d'un oscillateur au cas où la force $F(t)$ est appliquée doucement et progressivement au cours d'un long laps de temps τ, de sorte que $\omega\tau \gg 1$. Pour $t < 0$ la force $F(t) = 0$, pour $t > \tau$ la force $F(t) = F_0$, pour $0 < t < \tau$ se vérifie l'estimation $F^{(k)}(t) \sim F_0/\tau^k$ ($k = 0, 1, \ldots, n+1$) ; d'autre part, $F^{(s)}(0) = F^{(s)}(\tau) = 0$ ($s = 1, 2, \ldots, n-1$), tandis que la dérivée n-ième de la force pour $t = 0$ et $t = \tau$ effectue un bond.

5.19. Rechercher les oscillations permanentes d'un oscillateur soumis à l'action d'une force périodique $F(t)$:

a) $F(t) = F\cdot(t/\tau - n)$ pour $n\tau \leqslant t < (n+1)\tau$ (fig. 17);
b) $F(t) = F\cdot(1 - e^{-\lambda t'})$, $t' = t - n\tau$ pour $n\tau \leqslant t < (n+1)\tau$ (fig. 18).

Apprécier le temps mis à la stabilisation des oscillations si le décrément de l'amortissement vaut δ.

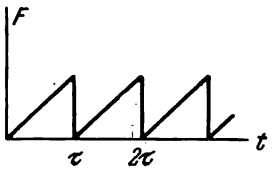


Fig. 17

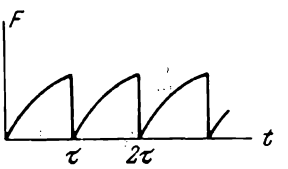


Fig. 18

c) Trouver le courant stabilisé dans le circuit (voir fig. 16) dont la source de tension est en forme de scie $U(t) = (t/\tau - n)V$ pour $n\tau \leqslant t < (n+1)\tau$.

5.20. Sur un oscillateur amorti (pulsation propre ω_0, frottement $f_{fr} = -2\lambda m\dot{x}$) agit une force imposée $F(t)$.

a) Trouver le travail moyen A développé par cette force pour des oscillations permanentes au cas où $F(t) = f_1 \cos \omega t + f_2 \cos 2\omega t$.

b) Même question pour $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$, $a_{-n} = a_n^*$.

c) Trouver le travail moyen développé durant un long laps de temps par la force $F(t) = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t$ pour des oscillations permanentes.

d) Trouver le travail total de la force $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, $\psi(-\omega) = \psi^*(\omega)$ si l'oscillateur, pour $t \to -\infty$, était au repos.

5.21. Un oscillateur harmonique se trouve dans le champ d'une onde progressive qui agit sur lui avec une force $F(x, t) = f(t - x/V)$, où x est l'écartement de l'oscillateur de la position d'équilibre, V la vitesse de l'onde. En posant x suffisamment petit, trouver la relation liant l'énergie ΔE transmise à l'oscillateur et l'impulsion

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F(x(t), t)\, dt,$$

en se limitant à l'approximation quadratique en F et en posant $f(\pm\infty) = 0$.

§ 6. Petites oscillations de systèmes à plusieurs degrés de liberté

Dans les problèmes 6.1-6.21, en recourant à des méthodes générales, on a étudié les oscillations libres et forcées des systèmes relativement simples (à deux et trois degrés de liberté). Dans les problèmes 6.18-6.21 on étudie les systèmes à pulsations propres dégénérées.

Pour aborder l'étude de systèmes plus complexes, il est utile de profiter de l'orthogonalité des oscillations propres ainsi que de la symétrie du système. Les théorèmes correspondants sont données aux problèmes 6.22 et 6.39, tandis que leur application est illustrée, par exemple, dans les problèmes 6.26-6.33 et 6.40-6.45, 6.47, ainsi que dans les problèmes sur les vibrations des molécules 6.46, 6.48-6.52.

L'influence d'une petite modification du système sur son mouvement peut être étudiée à l'aide de la méthode d'approximations successives, c'est-à-dire de la théorie des perturbations. La forme générale de la théorie des perturbations, pour le cas de petites oscillations, est traitée dans le problème 6.34, tandis que les exemples concrets sont abordés dans les problèmes 6.35, 6.37, 6.41, 6.42, 6.50b. Il est utile de noter que, de façon analogue, se construit la théorie des perturbations en mécanique quantique.

Dans les problèmes 6.36-6.38 on étudie les oscillations des systèmes dans lesquels agissent des forces « gyroscopiques » (voir de même les problèmes 9.24-9.27).

6.1. Rechercher les oscillations libres du système représenté sur la figure 19 au cours desquelles les particules se déplacent dans

Fig. 19

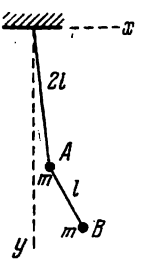


Fig. 20

le sens vertical. Trouver les coordonnées normales et exprimer au moyen de ces dernières la fonction de Lagrange.

6.2. Rechercher les oscillations permanentes du système décrit au problème précédent au cas où le point de suspension se déplace suivant la verticale en se conformant à la loi $a(t)$, où

a) $a(t) = a \cos \gamma t$,

b) $a(t) = a\left(\frac{t}{\tau} - n\right)$ pour $n\tau \leqslant t < (n+1)\tau$.

6.3. Rechercher les petites oscillations libres d'un double pendule plat (fig. 20).

6.4. Rechercher les oscillations libres du système dont la fonction de Lagrange

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2}$$

Quel est l'aspect de la trajectoire du point en coordonnées cartésiennes (x, y)?

6.5. Rechercher les oscillations naturelles du système dont la fonction de Lagrange est:

a) $L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2} + \alpha x y$;

b) $L = \frac{m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2}{2} + \beta \dot{x} \dot{y} - \frac{x^2 + y^2}{2}$.

6.6. Rechercher les oscillations naturelles dans les systèmes de circuits couplés: a) fig. 21, *a*; b) fig. 21, *b*.

6.7. Rechercher les oscillations naturelles d'un système de particules réunies par des ressorts (fig. 22). Les particules ne peuvent

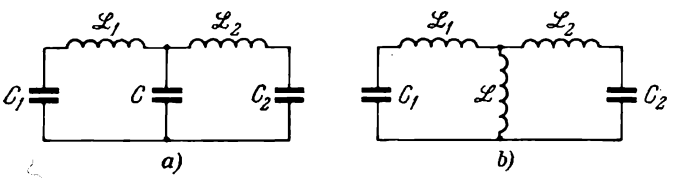


Fig. 21

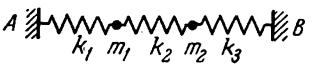


Fig. 22

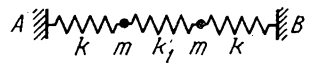


Fig. 23

se mouvoir que le long de la droite AB. Trouver les oscillations libres du système.

6.8. Rechercher les oscillations libres du système (fig. 23) pour le cas où au moment initial:

a) une des particules est animée de la vitesse v, la vitesse de l'autre particule et l'écartement des deux particules de la position d'équilibre étant nuls;

b) l'une des particules s'écarte de la position d'équilibre de la distance a, tandis que l'écartement de l'autre particule et les vitesses des deux particules sont nuls.

Les particules ne peuvent se déplacer que le long de la droite AB.

6.9. Déterminer le flux d'énergie émanant d'une des particules et se dirigeant vers l'autre en se servant des conditions du problème précédent.

6.10. Rechercher les oscillations libres du système (fig. 23) si chacune des particules est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse.

6.11. Trouver les petites oscillations libres d'un pendule double (fig. 24) au cas où, à l'origine, le pendule du haut occupe une posi-

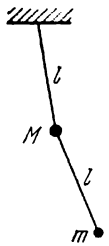


Fig. 24

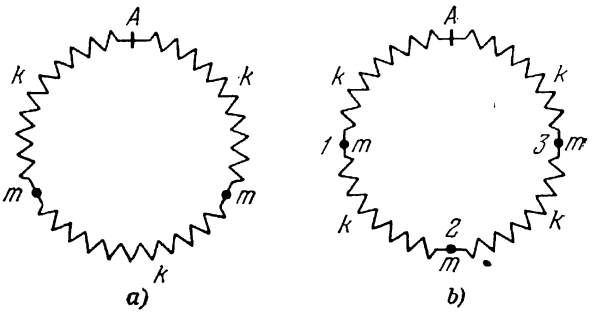


Fig. 25

tion verticale, tandis que celui du bas s'en écarte de l'angle $\beta \ll 1$, leurs vitesses étant nulles. Les masses des pendules sont M et m, avec $M \gg m$.

6.12. Rechercher les oscillations permanentes du système (voir fig. 23) pour le cas où le point A auquel est fixé le bout gauche du ressort se déplace suivant la loi $a \cos \gamma t$ en direction de la droite AB.

6.13. Rechercher les oscillations permanentes d'un système de deux particules sur un anneau *) (fig. 25, *a*) si le point A se meut sur l'anneau en suivant la loi $a \cos \gamma t$. Étudier la dépendance des amplitudes d'oscillations de la pulsation de la force imposée.

6.14. Trois particules de masse m chacune sont reliées par des ressorts et peuvent se mouvoir sur un anneau (fig. 25, *b*). Trouver les oscillations permanentes du système pour le cas où le point A se déplace sur l'anneau suivant la loi $a \cos \gamma t$.

6.15. Rechercher les oscillations permanentes du système représenté sur la figure 23 pour le cas où le point A se déplace en suivant la loi $a \cos \gamma t$. Les particules sont sollicitées par la force de frottement proportionnelle à la vitesse.

*) Dans ce problème ainsi que dans les problèmes analogues l'anneau est supposé lisse et au repos.

6.16. Rechercher le mouvement du système de la figure 22 si, à l'instant initial, les particules étaient au repos en position d'équilibre, au cas où le point A se déplace suivant la loi $a \cos \gamma t$. Les masses des particules sont les mêmes ($m_1 = m_2 = m$).

6.17. Rechercher les oscillations permanentes d'une particule (fig. 26) soumise à l'action d'un champ oscillant uniforme $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(t)\,\mathbf{r}$, où le vecteur $\mathbf{F}(t)$ se trouve dans le plan du dessin, pour les cas

a) $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \cos \gamma t$,

b) $\mathbf{F}(t)$ tourne avec la pulsation γ en restant constant en grandeur.

6.18. Rechercher les oscillations de trois particules identiques

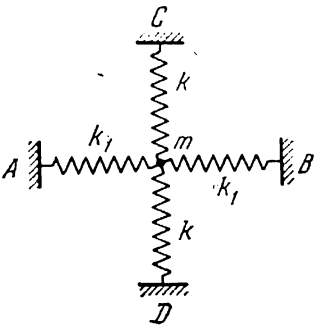


Fig. 26

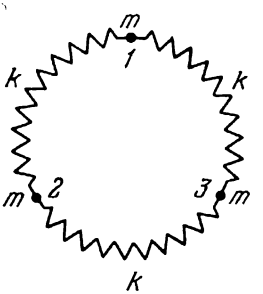


Fig. 27

reliées par des ressorts semblables et pouvant se mouvoir sur un anneau (fig. 27).

Déterminer les coordonnées normales réduisant la fonction de Lagrange à une somme de carrés.

6.19. Rechercher les oscillations libres du système étudié dans le problème précédent pour le cas où, à l'instant initial, l'une des particules s'écarte de la position d'équilibre. Les vitesses initiales sont nulles.

6.20. Rechercher les oscillations naturelles d'un système composé de trois particules pouvant se déplacer sur un anneau (fig. 28).

6.21. Trouver les coordonnées normales d'un système à quatre particules situées sur un anneau (fig. 29).

6.22. Les oscillations naturelles du système décrit par la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j)$$

prennent la forme

$$x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)} \cos(\omega_l t + \varphi_l).$$

Démontrer que les amplitudes correspondant aux oscillations de pulsations ω_l et ω_s satisfont aux relations

$$\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)} = 0.$$

6.23. Au système décrit par la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j)$$

est imposée une liaison linéaire

$$\sum_i a_i x_i = 0, \quad a_i = \text{const}.$$

Les pulsations propres du système sans liaison étant différentes $\Omega_1 < \Omega_2 < \ldots < \Omega_N$, démontrer que toutes les pulsations du

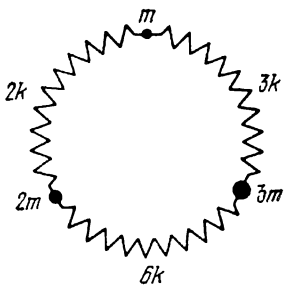


Fig. 28

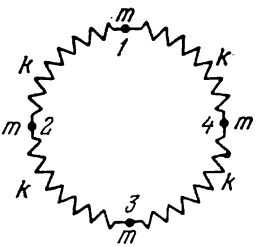


Fig. 29

système avec liaison ω_l se disposent dans les intervalles entre Ω_l:

$$\Omega_1 \leqslant \omega_1 \leqslant \Omega_2 \leqslant \omega_2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_{N-1} \leqslant \Omega_N.$$

6.24. Les oscillations permanentes du système décrit par la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j) + \sum_i x_i f_i \cos \gamma t$$

peuvent être représentées sous la forme $x_i(t) = \sum_l \lambda^{(l)} A_i^{(l)} \cos \gamma t$ (Pour quelle raison ?) (les notations sont celles du problème 6.22).

Exprimer les coefficients $\lambda^{(l)}$ en fonction de f_l et $A_i^{(l)}$.

Étudier la dépendance de $\lambda^{(l)}$ de γ.

Montrer que si pour la s-ième oscillation naturelle $\sum_i f_i A_i^{(s)} = 0$, $\lambda^{(s)} = 0$.

6.25. Un système de particules réunies par des ressorts est susceptible d'effectuer des petites oscillations. A l'une d'elles, à savoir,

à la particule A, suivant la direction x, est appliquée la force $F = F_0 \cos \gamma t$, tandis qu'une autre particule, la particule B, effectue des oscillations permanentes dont la projection de l'écartement sur la direction x' prend la forme $x'_B = C \cos \gamma t$.

Montrer que l'action de la force F sur la particule B suivant l'axe x' engendre des oscillations de la particule A pour lesquelles $x_A = C \cos \gamma t$ (théorème de réciprocité).

6.26. Rechercher les oscillations naturelles d'un système de particules pouvant se déplacer sur un anneau (fig. 30).

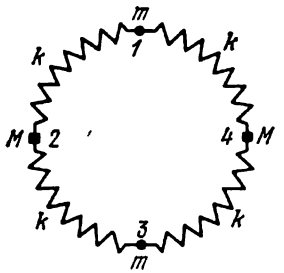


Fig. 30

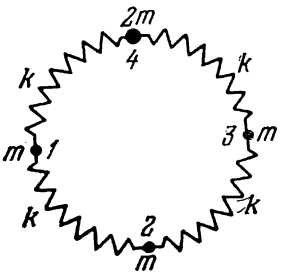


Fig. 31

6.27. Rechercher les oscillations naturelles d'un système de quatre particules sur un anneau (fig. 31).

6.28. a) Trouver les oscillations naturelles du système représenté sur la figure 32. Toutes les particules et tous les ressorts sont les mêmes. La tension des ressorts en position d'équilibre est $f = kl$, où l est la distance d'équilibre entre les particules.

Conseil. Certaines des oscillations naturelles sont évidentes. La détermination des autres peut être simplifiée en recourant aux relations du problème 6.22.

b) Trouver les oscillations naturelles du système de quatre particules identiques représentées sur la figure 32 (la cinquième particule manque, les ressorts étant réunis en ce point). Les coefficients de rigidité et de tension sont les mêmes pour tous les ressorts.

6.29. Trois particules de masses différentes m_i ($i = 1, 2, 3$) se déplacent sur un anneau (fig. 33). Pour quelles valeurs des coefficients de rigidité des ressorts k_i observera-t-on dans le système la dégénérescence des pulsations?

6.30. Lesquelles des oscillations naturelles du système de la figure 27 varient très peu pour une petite modification du système consistant :

a) en une variation de la rigidité du ressort *1-2* d'une petite quantité δk ;

b) en l'adjonction à la particule *3* d'une petite surcharge δm ;

c) en l'adjonction à la particule *1* d'une surcharge δm_1 et à la particule *2* d'une surcharge δm_2?

6.31. Pour *a* et *b* du problème précédent, décrire les oscillations libres au cas où, à l'instant initial, les particules *1* et *3* sont déplacées l'une à l'encontre de l'autre d'une même distance. Les vitesses initiales des particules sont nulles.

6.32. Le système de la figure 29 présente des pulsations dégénérées, aussi ses oscillations naturelles ne se définissent-elles pas de

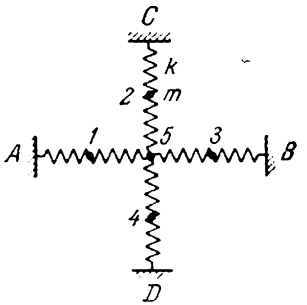


Fig. 32

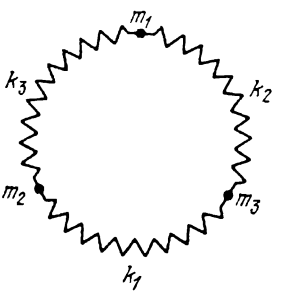


Fig. 33

façon univoque. Même une petite variation des masses des particules ou de la rigidité des ressorts peut aboutir à *la levée de la dégénérescence*.

Trouver les oscillations naturelles du système de la figure 29, qui soient proches des oscillations naturelles du système obtenu si

a) on ajoute à la première et à la deuxième particule des surcharges identiques;

b) on modifie de la même façon la rigidité des ressorts *1-2* et *3-4*;

c) on ajoute une surcharge à la première particule.

6.33. Les particules *1* et *3* du système décrit dans le problème 6.32,b sont, à l'instant initial, écartées de la position d'équilibre d'une même distance à l'encontre l'une de l'autre; les vitesses initiales de toutes les particules sont nulles. Décrire les oscillations libres du système.

6.34. Déterminer comment varient les pulsations propres du système décrit par la fonction de Lagrange

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - k_{ij}x_ix_j)$$

au cas de son insensible modification:

$$\delta L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\delta m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \delta k_{ij}x_ix_j).$$

Toutes les pulsations propres du système étalon ne sont pas dégénérées.

6.35. Rechercher la variation des pulsations propres du système de la figure 31, si à la première particule est adjointe une petite surcharge δm, de sorte que $\varepsilon = \delta m/m \ll 1$.

6.36. Déterminer les oscillations libres d'un oscillateur anisotrope chargé d'énergie potentielle $U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$ dans un champ magnétique uniforme $\mathfrak{H}$ parallèle à l'axe z. Étudier, en particulier, en détail les cas limites:

a) $|\omega_{\mathscr{H}}| \ll |\omega_1 - \omega_2|$, b) $|\omega_{\mathscr{H}}| \gg \omega_{1,2}$,

c) $\omega_1 = \omega_2 \gg |\omega_{\mathscr{H}}|$

(ici $\omega_{\mathscr{H}} = e\mathscr{H}/mc$).

6.37. Déterminer les oscillations libres d'un oscillateur anisotrope harmonique d'énergie potentielle $U(\boldsymbol{r}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$

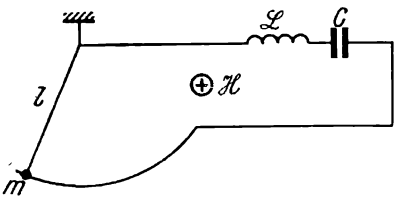


Fig. 34

dans un faible champ magnétique $\mathfrak{H} = (\mathscr{H}_x, 0, \mathscr{H}_z)$, en assimilant l'action du champ magnétique à une petite perturbation.

6.38. Un pendule simple est introduit dans un circuit électrique (fig. 34). Perpendiculairement au plan du dessin est appliqué un champ magnétique uniforme constant $\mathfrak{H}$. Trouver les oscillations naturelles du système.

6.39. Un système oscillant aux petits mouvements (et, partant, sa fonction de Lagrange $L(x, \dot{x})$) ne modifie pas sa forme avec le changement

$$x_i \to \sum_j S_{ij} x_j; \quad \dot{x}_i \to \sum_j S_{ij} \dot{x}_j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, N,$$

les coefficients constants $S_{ij} = S_{ji}$ satisfaisant à la condition *)

$$\sum_j S_{ij} S_{jk} = \delta_{ik}.$$

Démontrer que:

*) Cette condition implique qu'après une double transformation du système ce dernier revient à l'état initial. C'est le cas, par exemple, des réflexions sur un plan de symétrie du système ou des rotations de 180° autour de l'axe de symétrie.

a) si l'oscillation naturelle $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$ n'est pas dégénérée, les amplitudes A_i sont symétriques ou antisymétriques vis-à-vis de la transformation concernée, c'est-à-dire qu'on a

$$\text{soit } \sum_j S_{ij}A_j = +A_i, \quad \text{soit } \sum_j S_{ij}A_j = -A_j;$$

b) si les pulsations sont dégénérées, on peut alors choisir entre les oscillations naturelles symétriques ou antisymétriques;

c) si le système est sollicité par une force extérieure symétrique (ou antisymétrique) par rapport à la transformation concernée, les oscillations naturelles antisymétriques (symétriques) ne sont alors pas amorcées. (C'est un exemple d'application de règles de sélection.)

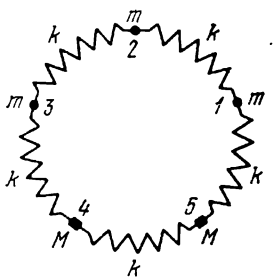


Fig. 35

6.40. En s'appuyant sur des considérations de symétrie, trouver les oscillations naturelles du système de la figure 35.

6.41. Décrire les oscillations libres du système (voir fig. 32), si, à l'instant initial, les particules *1* et *4* sont déplacées l'une à l'encontre de l'autre à la même distance dans la direction horizontale, les vitesses initiales de toutes les particules étant nulles. La tension des ressorts $f = kl_1$; $l - l_1 \ll l$, où l est la distance d'équilibre entre les particules (comparer avec le problème 6.31).

6.42. Rechercher les corrections à apporter aux pulsations des oscillations naturelles d'un système de quatre particules sur un anneau (fig. 29) au cas de petites variations des masses de δm_1 pour la première et de δm_2 pour la deuxième particule.

6.43. En s'appuyant sur des considérations de symétrie, déterminer les vecteurs des oscillations naturelles d'un système de particules (fig. 36). Toutes les masses des particules et tous les ressorts sont identiques.

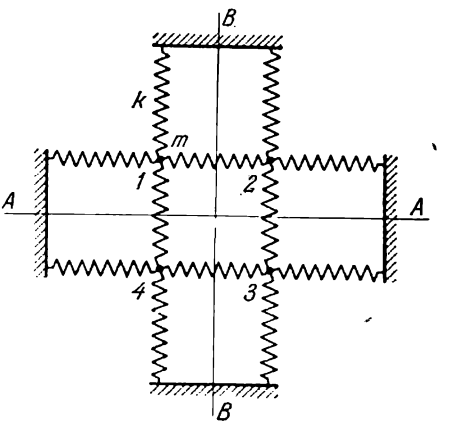


Fig. 36

6.44. Rechercher les oscillations naturelles d'un système à huit masses réunies par des ressorts à un cadre fixe (fig. 37). Les rigidités k, les tensions f et les longueurs l de tous les ressorts sont les mêmes.

6.45. Le cadre représenté à la figure 37 oscille dans la direction AA suivant la loi $a \cos \gamma t$. Pour quelles valeurs de la pulsation γ l'intensification des oscillations est-elle possible?

6.46. Rechercher les oscillations naturelles de la molécule linéaire symétrique d'acétylène C_2H_2 (fig. 38) en admettant que l'énergie potentielle de la molécule est fonction de la distance entre les atomes adjacents ainsi que des angles HCC.

6.47. Deux particules identiques sont réunies par des ressorts à un cadre fixe (fig. 39). Le système est symétrique par rapport à l'axe CF. Quelle information peut-on obtenir sur les oscillations naturelles en ignorant les rigidités et les tensions des ressorts?

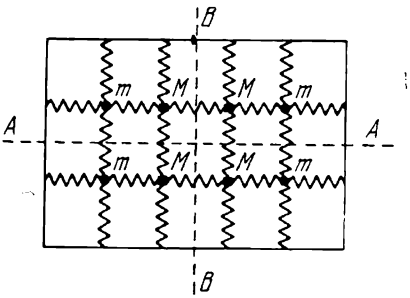


Fig. 37

6.48. Classer les oscillations propres de la molécule d'éthylène C_2H_4 suivant leurs symétries par rapport aux axes AB et CD (fig. 40). En position d'équilibre, tous les atomes de la molécule se disposent dans un même plan.

6.49. Rechercher les oscillations naturelles d'une molécule présentant la forme d'un triangle équilatéral. Posons que l'énergie

Fig. 38

potentielle ne dépend que des distances interatomiques (tous les atomes sont identiques). Le moment, à la précision des petits du premier ordre inclus en amplitude d'oscillations près, est égal à zéro.

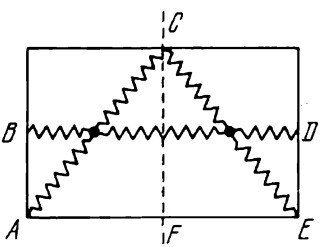


Fig. 39

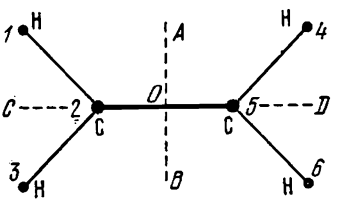


Fig. 40

6.50. Une molécule du type AB_3 est de forme d'un triangle équilatéral au centre duquel se place l'atome A, tandis que les som-

mets portent les atomes B (telle est, en particulier, la molécule du chlorure de bore BCl_3).

a) En s'appuyant sur des considérations de symétrie, déterminer la multiplicité de la dégénérescence des pulsations propres de la molécule.

b) Déterminer comment varient les pulsations des oscillations ne modifiant pas la forme de triangle équilatéral de la molécule, de même que des oscillations faisant sortir les atomes du plan, si l'un des atomes B (de masse m) est remplacé par son isotope de masse très proche ($m + \delta m$). La masse de l'atome A est m_A.

6.51. En s'appuyant sur des considérations de symétrie, déterminer la multiplicité de la dégénérescence de différentes pulsations propres de la « molécule » composée de quatre « atomes » identiques et possédant dans la position d'équilibre la forme d'un tétraèdre régulier.

6.52. La molécule du méthane CH_4 a la forme d'un tétraèdre régulier aux sommets duquel se placent les atomes d'hydrogène, tandis qu'en son centre est situé l'atome de carbone.

a) Déterminer les multiplicités de la dégénérescence des pulsations propres de la molécule.

b) Sur combien de pulsations propres observe-t-on une excitation de résonance d'oscillations propres de la molécule CH_4 si cette dernière est soumise à l'action d'un champ électrique oscillant uniforme? (Il s'agit en fait d'ondes électromagnétiques du domaine infrarouge dont la longueur est de plusieurs ordres supérieure aux dimensions de la molécule.) On tiendra compte de ce que les atomes d'hydrogène et de carbone possèdent des charges de signes opposés.

Quelle est la relation liant l'amplitude des oscillations de l'atome de carbone à l'orientation de la molécule par rapport au champ électrique?

§ 7. Oscillations de chaînes linéaires

Les chaînes de particules examinées dans les problèmes de ce paragraphe sont réunies par des ressorts et constituent les modèles les plus simples utilisés dans la théorie du corps solide (voir, par exemple, [18]). L'analogie électrique de ces chaînes est constituée par les lignes fantômes de la radiotechnique (voir, par exemple, [16]).

7.1. Déterminer les oscillations naturelles du système à N particules identiques de masse m réunies par des ressorts identiques de rigidité k et pouvant se déplacer sur une droite (fig. 41).

Conseil. Il est commode de rechercher les oscillations naturelles en forme de superposition d'ondes progressives.

7.2. Même question pour le système (fig. 42) dont l'une des extrémités est libre.

7.3. Rechercher les oscillations libres de N particules réunies par des ressorts et pouvant se déplacer sur un anneau (fig. 43). Les

masses des particules et les rigidités des ressorts sont partout les mêmes. Assimilons le mouvement à une onde progressive lancée sur l'anneau. Vérifier que le flux d'énergie est égal au produit de la densité linéaire par la vitesse de groupe.

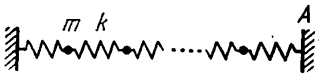


Fig. 41

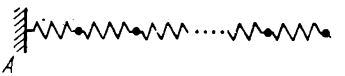


Fig. 42

7.4. Déterminer les oscillations libres d'un système de particules susceptibles de se mouvoir sur une droite :

a) $2N$ particules de masses m et M sont réunies par des ressorts identiques de rigidité k (fig. 44) ;

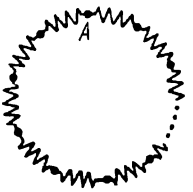


Fig. 43

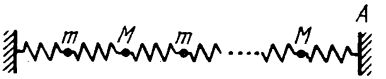


Fig. 44

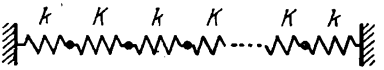


Fig. 45

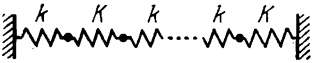


Fig. 46

b) $2N$ particules de masses m sont réunies par des ressorts de rigidité k et K (fig. 45) ;

c) $2N + 1$ particules de masses m sont réunies par des ressorts de rigidité k et K (fig. 46).

Voir conseil donné au problème 7.1.

7.5. a) Rechercher les oscillations permanentes du système décrit dans le problème 7.1, si le point A suit dans son mouvement la loi $a \cos \gamma t$ (fig. 41).

b) Même question pour le système de la figure 42.

7.6. Même question pour le système de la figure 44.

7.7. Rechercher les oscillations naturelles d'un système de particules pouvant se déplacer suivant une droite et réunies par des ressorts pour les cas :

a) $m_i = m \neq m_N$, $i = 1, 2, \ldots, N - 1$, les rigidités des ressorts étant les mêmes (fig. 47) ; étudier les cas de $m_N \gg m$ et de $m_N \ll m$;

b) $k_i = k \neq k_{N+1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, toutes les particules sont les mêmes (fig. 48) ; étudier les cas de $k_{N+1} \gg k$ et de $k_{N+1} \ll k$.

7.8. a) N pendules sont réunis par des ressorts et ne peuvent se déplacer que dans le plan vertical passant par la ligne horizontale

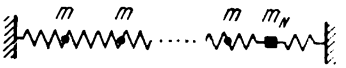


Fig. 47

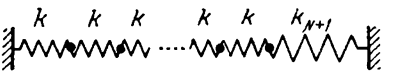


Fig. 48

de suspension (fig. 49). Trouver les oscillations naturelles du système quand tous les pendules et tous les ressorts sont identiques, la longueur du ressort en position d'équilibre étant égale à la distance séparant les points de suspension des pendules voisins.

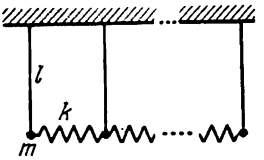


Fig. 49

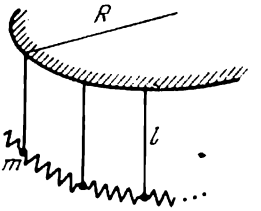


Fig. 50

b) $2N$ pendules identiques sont réunis par des ressorts identiques et ne peuvent se mouvoir que dans les plans verticaux perpendiculaires au cercle décrit par le point de suspension (fig. 50). La distance séparant deux points de suspension voisins vaut a. La longueur de

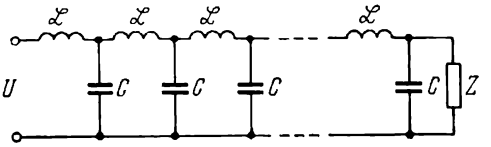


Fig. 51

chaque ressort non tendu vaut b. Étudier comment dépend la permanence de petites oscillations au voisinage de la verticale de la valeur du paramètre $b - a$. Le rayon du cercle de la ligne de suspension R doit être pris suffisamment grand pour qu'on puisse négliger les petites grandeurs l/R, a/R, b/R.

7.9. a) A un bout de la ligne fantôme de la figure 51 est connectée une source de tension alternative $U \cos \gamma t$. Quelle résistance agglo-

mérée $Z(\gamma)$ doit-on raccorder à l'autre bout de la ligne pour que les oscillations y engendrent une onde progressive, autrement dit pour que la tension sur chacun des condensateurs ne soit déphasée de celle du condensateur voisin que d'une façon déterminée?

b) Même question pour la ligne fantôme de la fig. 52.

7.10. Une tige rigide peut être assimilée au cas limite d'un système de N particules (voir fig. 41) à condition que, pour $N \to \infty$,

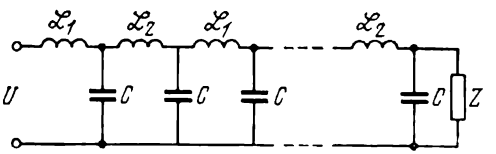


Fig. 52

$a \to 0$, en outre $Nm = \text{const}$ et $Na = \text{const}$, où m est la masse de la particule, a la distance entre les particules voisines en position d'équilibre. Établir les équations des vibrations de la tige comme limite des équations de mouvement d'un système discontinu.

Conseil. Introduire la coordonnée du point de la tige $\xi = na$, ainsi que les grandeurs obtenues en passant à la limite $a \to 0$

$$x(\xi, t) = \lim x_n(t),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \lim \frac{x_n(t) - x_{n-1}(t)}{a}.$$

7.11. Établir l'équation des vibrations de la tige du problème précédent en tenant compte de la première correction qui ne disparaît pas et est impliquée par la finitude de la distance a entre les particules voisines.

§ 8. Oscillations non linéaires

8.1. Déterminer la distorsion de l'oscillation harmonique d'un oscillateur, engendrée par l'adjonction de corrections anharmoniques à l'énergie potentielle:

a) $\delta U(x) = \dfrac{m\beta x^4}{4}$;

b) $\delta U(x) = \dfrac{m\alpha x^3}{3}$.

8.2. Déterminer la distorsion de l'oscillation harmonique d'un oscillateur, engendrée par une correction anharmonique apportée à l'énergie cinétique

$$\delta T = \frac{m\gamma x \dot{x}^2}{2}.$$

8.3. Rechercher les corrections anharmoniques aux oscillations d'un pendule dont le point de suspension décrit un cercle (fig. 15).

8.4. Rechercher les oscillations d'un oscillateur soumis à l'action de la force $f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t$, compte tenu de la correction anharmonique $\delta U(x) = \frac{m\alpha x^3}{3}$.

8.5. Le pendule se compose d'une masselotte de masse m fixée à un ressort de rigidité k. La longueur du ressort non tendu est l_0. Trouver les corrections anharmoniques aux oscillations du pendule.

Se servir des coordonnées cartésiennes de l'écartement de la masselotte de la position d'équilibre.

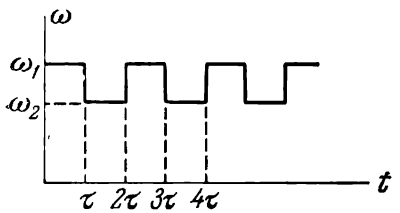


Fig. 53

8.6. Trouver l'amplitude des oscillations permanentes d'un oscillateur anharmonique

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t$$

a) dans la zone de résonance $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$;

b) dans la zone de résonance sur la triple pulsation de la force imposée $|3\omega - \omega_0| \ll \omega_0$.

8.7. a) Déterminer l'amplitude et la phase de l'oscillation permanente d'un oscillateur au cas d'une résonance paramétrique

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 (1 + h \cos 2\omega t)\, x + \beta x^3 = 0$$
$$(h \ll 1,\ |\omega - \omega_0| \ll \omega_0,\ \beta x^2 \ll \omega_0^2).$$

b) Déterminer l'amplitude du troisième harmonique d'une oscillation permanente.

8.8. Déterminer l'oscillation de l'oscillateur

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + h \cos 2\omega t)\, x = 0 \quad (h \ll 1,\ |\omega - \omega_0| \ll \omega_0)$$

a) dans le domaine d'instabilité relativement à la résonance paramétrique;

b) au voisinage du domaine d'instabilité.

8.9. La pulsation de l'oscillateur harmonique $\omega(t)$ varie suivant la loi représentée sur la figure 53. Trouver les domaines d'instabilité relativement à la résonance paramétrique.

8.10. Déterminer comment varient dans le temps les amplitudes des oscillateurs faiblement liés dont la fonction de Lagrange est

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 x^2 - 4\omega^2 y^2 + 2\alpha x^2 y).$$

8.11. Rechercher la fréquence des petites oscillations libres d'un pendule dont le point de suspension effectue des oscillations verticales de grandes pulsations γ ($\gamma \gg \sqrt{g/l}$).

8.12. Déterminer l'énergie potentielle efficace:
a) d'une particule de masse m située dans le champ

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}\cos\omega t|} - \frac{\alpha}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}\cos\omega t|} \quad (r \gg a);$$

b) d'un oscillateur situé dans le champ

$$U(\mathbf{r}) = 2\alpha \frac{\mathbf{ar}\cos\omega t}{r^3}.$$

8.13. Déterminer le mouvement d'une particule rapide pénétrant dans le champ $U = A(x^2 - y^2)\sin kz$ sous un petit angle par rapport à l'axe z $(k^2E \gg A)$.

8.14. Déterminer la vitesse de déplacement du centre de l'orbite d'une particule chargée dans un champ magnétique faiblement inhomogène. $\mathscr{H}_x = \mathscr{H}_y = 0$, $\mathscr{H}_z = \mathscr{H}(x)$ avec

$$\varepsilon = \frac{\mathscr{H}'(x)}{\mathscr{H}(x)} r \ll 1, \quad r = \frac{mvc}{e\mathscr{H}(x)},$$

où r est le rayon de l'orbite.

8.15. Le problème se ramène à un modèle mécanique de transitions de phases de second ordre.

Une bille en fer de masse m peut osciller suivant l'axe y sur un ressort dont l'énergie potentielle est de la forme $U(y) = -Cy^2 + By^4$ *). A l'aide d'un électro-aimant, on amorce des oscillations de la bille, qui suivent la loi $y_0 \cos \gamma t$, γ étant beaucoup supérieure à la pulsation de ses oscillations propres **).

Trouver la pulsation des petites oscillations propres de la bille en fonction du paramètre $T = y_0^2$.

§ 9. Mouvement du solide. Référentiels non galiléens

9.1. Aux sommets d'un carré de côté $2a$ sont placées les masses m et M (fig. 54, *a*). Trouver les composantes du tenseur d'inertie par rapport:

a) aux axes x, y, z;

b) aux axes x', y', coïncidant avec les diagonales du carré, et par rapport à z.

---

*) Telle est, par exemple, l'énergie potentielle du système représenté sur la figure 13 au cas où la bille n'est susceptible de se mouvoir que dans la direction de l'axe y, perpendiculaire à la ligne AB, la longueur du ressort non tendu l_0 étant supérieure à l. Dans ce cas pour $|y| \ll l$, on a

$$C = k(l_0 - l)/l, \quad B = kl_0/4l^3.$$

**) Avec l'action d'une force de haute fréquence $f(t) = -(y_0\gamma^2/m)\cos\gamma t$ à la limite: $\gamma \to \infty$, l'amplitude des oscillations forcées tend vers y_0, les corrections à l'amplitude et les harmoniques supérieurs étant de petitesse $\sim\gamma^{-2}$.

9.2. Trouver les axes d'inertie principaux et les moments d'inertie principaux des systèmes suivants :

a) les masses m et M sont situées aux sommets d'un rectangle de côtés $2a$ et $2b$ (fig. 54, *b*) ;

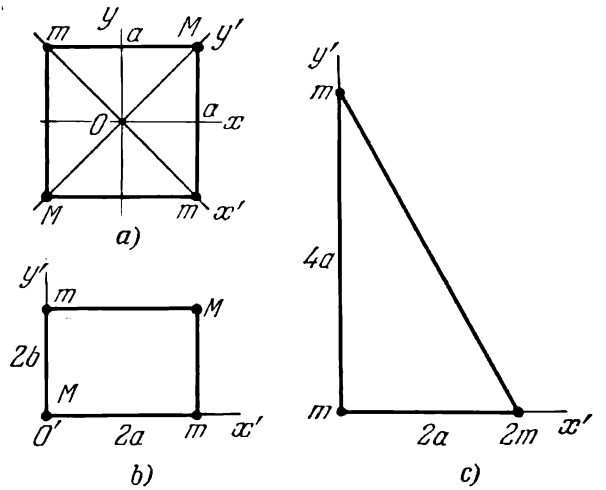


Fig. 54

b) les masses m et $2m$ sont disposées aux sommets d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont $2a$ et $4a$ (fig. 54, *c*).

9.3. Exprimer le moment d'inertie $I_{\mathbf{n}}$ relativement à l'axe parallèle au vecteur unité $\mathbf{n}$ et passant par le centre d'inertie du corps, en fonction des composantes du tenseur d'inertie.

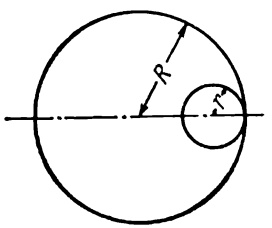


Fig. 55

9.4. Trouver les moments d'inertie principaux d'une sphère de rayon R présentant à l'intérieur une cavité en forme de sphère de rayon r (fig. 55).

9.5. Exprimer les composantes du tenseur du moment quadripolaire des masses

$$D_{ik} = \int (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})\, \rho\, dV$$

(ρ étant la densité) en fonction des composantes du tenseur d'inertie I_{ik}.

9.6. Chercher la pulsation des petites oscillations d'une sphère homogène placée sur une surface horizontale lisse dans le champ de gravité.

9.7. Une petite haltère constituée d'une paire de billes identiques en contact percute une troisième bille semblable. Sa vitesse $\mathbf{V}$ est perpendiculaire à la ligne des centres de l'haltère et est dirigée

vers le centre d'une des billes. Trouver la vitesse de la bille et de l'haltère après le choc. Le choc est élastique.

9.8. Quelle sera la durée du jour quand il s'égalisera (aux dépens de l'action des marées) avec le mois (c'est-à-dire que la période de révolution de la Terre autour de son axe deviendra égale à celle de la révolution de la Lune autour de la Terre). Admettre, pour simplifier, que l'axe de rotation de la Terre est perpendiculaire au plan des orbites de la Terre et de la Lune. Pour des estimations numériques, poser que la Terre est une sphère homogène de rayon $a = 6{,}4$ mille km et de masse M qui est 81 fois plus grande que celle de la Lune m; la distance de la Terre à la Lune est $R = 380$ mille km.

9.9. Deux sphères homogènes identiques en rotation à des mêmes vitesses angulaires ω se rapprochent lentement l'une de l'autre et

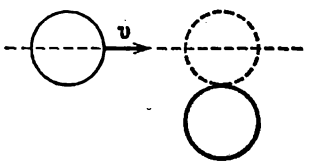


Fig. 56

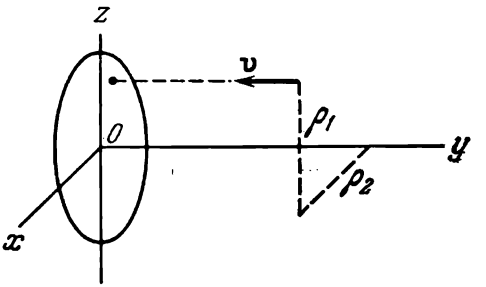


Fig. 57

entrent en contact de façon rigide. Déterminer le mouvement du corps ainsi formé. Trouver la partie de l'énergie cinétique initiale qui se transforme en chaleur. Avant la jonction, les vitesses angulaires des sphères se dirigeaient:

a) perpendiculairement à la ligne des centres et parallèlement l'une à l'autre;

b) l'une suivant la ligne des centres et l'autre, perpendiculairement.

9.10. Une sphère homogène de rayon r et de masse m roule sans glisser sur un plan horizontal à la vitesse $\mathbf{v}$. A l'instant où elle touche une autre sphère identique se trouvant au repos les sphères s'unissent rigidement (fig. 56). Le plan est absolument lisse (après union les sphères glissent librement sur lui).

Avec quelles forces les sphères agissent sur le plan? L'accélération de la chute libre est suffisamment grande, de sorte que les sphères sont constamment en contact avec le plan.

9.11. Un ellipsoïde de révolution homogène (demi-axes $a = b$, c) est percuté par une particule se mouvant, parallèlement à l'axe Oy, à la vitesse $\mathbf{v}$ dont les paramètres d'impact sont ρ_1, ρ_2

(fig. 57) ; après le choc la particule s'unit à l'ellipsoïde. Décrire le mouvement de l'ellipsoïde en posant que sa masse est beaucoup supérieure à celle de la particule incidente.

9.12. Un gyrocompas est un volant tournant à grande vitesse dont l'axe peut prendre une direction quelconque dans le plan horizontal (fig. 58). Étudier le mouvement du gyrocompas à la latitude α. La vitesse angulaire de la rotation de la Terre est Ω.

9.13. Une toupie s'appuyant sur un point immobile O et tournant à la vitesse angulaire Ω autour de son axe (la vitesse de pré-

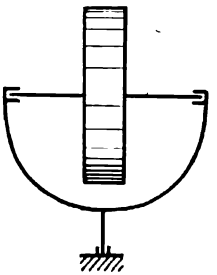


Fig. 58

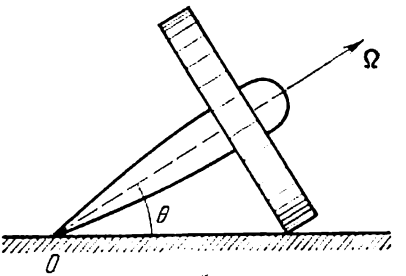


Fig. 59

cession étant supposée négligeable) touche avec le bord du disque le plan horizontal (fig. 59).

Rechercher la vitesse angulaire de la toupie à l'instant où le patinage du disque cesse. Lors du contact avec le plan, les nutations ne se manifestaient pas.

9.14. Dans le champ d'attraction d'une masse ponctuelle M se meut un corps homogène de masse m présentant la forme d'un ellipsoïde de révolution. Trouver la fonction de Lagrange du système en adoptant en guise de variables les coordonnées sphériques du centre de gravité et les angles d'Euler. Les dimensions du corps sont petites devant la distance au centre du champ.

Conseil. L'énergie potentielle du système vaut approximativement

$$U(\mathbf{R}) = m\varphi(R) + \frac{1}{6}\sum_{i,k=1}^{3} D_{ik}\frac{\partial^2\varphi(R)}{\partial X_i\,\partial X_k},$$

où $\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3)$ est le rayon vecteur du centre de l'ellipsoïde, D_{ik} le tenseur du moment quadripolaire des masses (voir problème 9.5), $\varphi(R) = -\gamma M/R$ le potentiel du champ d'attraction (comp. avec [2], § 42).

9.15. Déterminer la vitesse angulaire de la précession de l'axe terrestre impliquée par l'attraction du Soleil et de la Lune. L'incli-

naison de l'axe terrestre par rapport au plan des orbites de la Terre et de la Lune est 67°. Afin de simplifier, la Terre est assimilée à un ellipsoïde de révolution homogène à demi-axe polaire c inférieur au demi-axe équatorial a, avec $\frac{a-c}{a} \approx \frac{1}{300}$.

9.16. Établir les équations de mouvement des projections du moment sur les axes de coordonnées mobiles pris suivant les axes d'inertie. Intégrer ces équations dans le cas de mouvement libre d'une toupie symétrique.

9.17. Étudier la stabilité de la rotation d'une toupie asymétrique relativement aux axes d'inertie principaux en recourant aux équations d'Euler.

9.18. Une sphère homogène de rayon a se déplace sur la surface intérieure d'un cylindre vertical de rayon b sans patiner. Rechercher la loi de mouvement de la sphère.

9.19. a) Un disque plat, symétrique par rapport à son axe, roule sur un plan horizontal lisse (sans frottement). Déterminer la loi de mouvement du disque (en intégrales).

Étudier en détail la loi de mouvement dans les cas suivants.

Déterminer à quelles conditions l'angle d'inclinaison du disque par rapport au plan demeure constant.

Le disque roule de manière que son axe conserve une direction déterminée (horizontale). Déterminer pour quelle vitesse angulaire de rotation autour de cet axe le mouvement est permanent.

b) Le disque roule sans patiner sur un plan horizontal. Trouver les équations de mouvement et répondre aux mêmes questions qu'au point a).

c) Même question pour le disque qui roule sur un plan horizontal sans patiner et sans pivoter autour de l'axe vertical *).

d) Un disque sur un plan incliné tourne sans patiner autour de son diamètre perpendiculaire à ce plan. Rechercher le déplacement du disque au cours d'un temps prolongé. Le plan incliné forme un petit angle α avec l'horizontale.

9.20. a) Rechercher en intégrales la loi de mouvement d'une sphère inhomogène qui se meut sans frottement sur un plan horizontal. La distribution de densité est symétrique par rapport à l'axe passant par le centre des masses et le centre géométrique de la sphère.

Étudier l'influence de petites forces de frottement sur le mouvement de la sphère dans le cas où, en l'absence de frottement, la sphère se déplacerait de manière que l'angle formé par l'axe de symétrie et la verticale soit constant.

---

*) Cela signifie que la liaison du disque avec le plan au « point » de contact est réalisée de la sorte que l'élément de surface, à l'endroit du contact, ne patine pas sur le plan et ne pivote pas. On négligera les pertes en énergie dues au frottement de roulement.

b) Trouver les équations de mouvement de la sphère mentionnée au cas où elle roule sans patiner sur un plan horizontal.

9.21. Rechercher les écartements vers l'Est et vers le Sud de la verticale d'un corps chutant librement de la hauteur h. La vitesse initiale du corps est nulle.

9.22 *). Un vase rempli en partie de résine époxyde, qui durcit progressivement, est mis en rotation à la vitesse angulaire ω_2 autour de l'axe AB qui, de son côté, tourne à la vitesse angulaire ω_1 autour

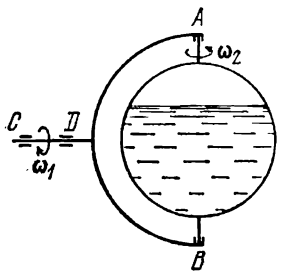


Fig. 60

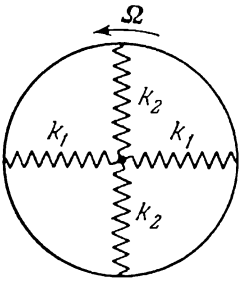


Fig. 61

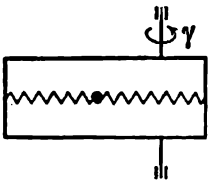


Fig. 62

de l'axe CD immobile (fig. 60). Quelle est la forme acquise par la surface de la résine une fois celle-ci durcie?

9.23. Une particule se déplace dans le champ central $U(r)$. Trouver l'équation de la trajectoire et la loi de mouvement dans le système de coordonnées en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω parallèle au moment cinétique $\mathbf{M}$.

9.24. Rechercher les petites oscillations de la particule m réunie par des ressorts de rigidité k_1 et k_2 à un cadre tournant dans son plan à la vitesse angulaire Ω (fig. 61). La particule peut se mouvoir dans le plan du cadre.

9.25. Un paraboloïde lisse $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ pivote autour de l'axe vertical z avec une vitesse angulaire ω. Pour quelle valeur de ω la position inférieure de la particule se trouvant à l'intérieur du paraboloïde devient instable? L'accélération de la pesanteur $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$.

9.26. Un cadre avec une particule de masse m fixée à des ressorts (dont les longueurs sont l, les coefficients de rigidité k et les tensions pour un cadre au repos f) tourne à une vitesse angulaire γ autour de l'axe z décalé à la distance a du centre du cadre (fig. 62).

Déterminer la distance d'équilibre de la particule de l'axe et apprécier sa stabilité.

---

*) Problème de V. Kouzmine et de M. Pérelroïsène.

Étudier les cas suivants:

a) la particule ne peut se mouvoir que le long des ressorts;

b) les déplacements de la particule peuvent être quelconques.

9.27. Deux étoiles décrivent des cercles autour de leur centre des masses. Dans le référentiel, où les étoiles sont immobiles, on demande de trouver les points en lesquels un corps léger qui y est placé demeure également au repos. Étudier la stabilité de ces « positions d'équilibre ». (Se limiter aux points ne se trouvant pas sur la droite joignant les étoiles.)

9.28. Déterminer les oscillations naturelles d'une molécule triatomique décrite au problème 6.49 pour le cas où son moment cinétique **M** n'est pas nul. La vitesse angulaire de la molécule en rotation est $\Omega \ll \sqrt{k/m}$; k est ici le coefficient de rigidité de la liaison. Le moment cinétique est perpendiculaire au plan de la molécule.

§ 10. Équations de Hamilton. Crochets de Poisson

10.1. Soit une fonction de Hamilton H d'un système de particules qui ne varie pas dans une transformation (rotation) infiniment petite. En déduire la loi de conservation de l'impulsion (du moment cinétique).

10.2. Trouver la fonction de Hamilton d'une toupie symétrique tournant librement en choisissant pour coordonnées les angles d'Euler θ, φ, ψ.

10.3. Déterminer la fonction de Hamilton d'un oscillateur anharmonique dont la fonction de Lagrange est

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2.$$

10.4. Rechercher la loi de mouvement d'une particule dont la fonction de Hamilton est

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \lambda \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \right)^2.$$

10.5. Trouver les équations de mouvement d'une particule dont la fonction de Hamilton $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c\,|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{p}, \mathbf{r})}$ (rayon de lumière).

Trouver la trajectoire si $n(\mathbf{r}) = ax$.

10.6. Trouver la fonction de Lagrange au cas où la fonction de Hamilton est égale à

a) $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{pa}$ $(\mathbf{a} = \mathbf{const})$;

b) $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c\,|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{r})}$

10.7. Rechercher la loi de mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique uniforme constant $\mathcal{H}$ en résolvant l'équation de Hamilton. Choisir le potentiel vecteur sous la forme

$$A_y = \mathcal{H}x, \quad A_x = A_z = 0.$$

10.8. Étudier qualitativement le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique inhomogène décrit par le potentiel vecteur $\mathbf{A} = (0, hx^2, 0)$. Confronter avec l'approximation de dérive.

10.9. Montrer que le problème du mouvement de deux particules de charges opposées (e et $-e$) dans un champ magnétique uniforme aboutit au problème du mouvement d'une particule dans des champs de potentiel et magnétique donnés [30].

Dans les problèmes 10.9-10.13 il s'agit du mouvement d'électrons dans le métal ou le semi-conducteur. Dans un solide, les électrons forment un système de particules interagissant entre elles et avec les ions constituant le réseau cristallin. Leur mouvement est décrit en mécanique quantique. En théorie du solide on arrive souvent à ramener le problème du mouvement d'un grand nombre de particules en interaction, composant le corps, aux problèmes de mouvement de particules libres isolées (appelées quasi-particules, électrons ou trous suivant le signe de la charge), mais impliquant, toutefois, une dépendance complexe de l'énergie de l'impulsion $\varepsilon(\mathbf{p})$ (« loi de dispersion ») *). Dans nombre de cas il s'avère possible d'étudier le mouvement des quasi-particules à l'aide de la mécanique classique. La fonction $\varepsilon(\mathbf{p})$ est une fonction périodique de période égale à la période du réseau dit réciproque **). Pour le reste les dépendances de $\varepsilon(\mathbf{p})$ étudiées par la suite peuvent être considérées comme arbitraires.

10.10. Il est bien entendu que $\varepsilon(\mathbf{p})$ est une fonction périodique de $\mathbf{p}$ de période égale à celle du réseau réciproque multipliée par $2\pi\hbar$ (par exemple, pour le réseau cubique de période a la période de $\varepsilon(\mathbf{p})$ vaut $2\pi\hbar/a$).

Déterminer la loi de mouvement d'un électron dans le champ électrique $\mathcal{E}$.

---

*) Par exemple, pour les trous dans les cristaux du germanium et du silicium

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\left[Ap^2 \pm \sqrt{B^2p^4 + C^2(p_x^2p_y^2 + p_x^2p_z^2 + p_y^2p_z^2)}\right],$$

pour lesquels les axes de coordonnées sont choisis en accord avec la symétrie des cristaux, m étant la masse de l'électron ; les constantes A, B, C prennent les valeurs suivantes :

	A	B	C
Ge	−13,1	8,3	12,5
Si	−4,0	1,1	4,1

**) Par exemple, pour un cristal dont le réseau dans la direction de l'axe x présente une période minimale a, on a $\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \varepsilon\left(p_x + \frac{2\pi\hbar}{a}, p_y, p_z\right)$, où $\hbar$ est la constante de Planck.

Conseil pour les problèmes 10.11-10.13. Dans ces problèmes il est commode, outre l'impulsion généralisée **P**, d'introduire l'impulsion cinématique $\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, où **A** est le potentiel vecteur du champ magnétique.

10.11. Soit

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \varepsilon\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + e\varphi$$

la fonction de Hamilton, rechercher les équations du mouvement (la charge de l'électron $e < 0$).

10.12. a) Trouver les intégrales de mouvement d'un électron au sein du solide plongé dans un champ magnétique uniforme. Quel est l'aspect de la « trajectoire » dans l'espace du momentum?

b) Démontrer que la projection de la trajectoire de l'électron dans un champ magnétique uniforme sur un plan perpendiculaire à $\mathfrak{H}$ s'obtient dans l'espace ordinaire à partir de la trajectoire dans l'espace du momentum par rotation et modification d'échelle.

10.13. Exprimer la période de révolution de l'électron dans un champ magnétique uniforme au moyen de l'aire $S(E, p_{\mathfrak{H}})$ de la section de la surface $\varepsilon(\mathbf{p}) = E$ dans l'espace du momentum par le plan $p_{\mathfrak{H}} = \mathbf{p}\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}} = \text{const}$.

10.14. Calculer les crochets de Poisson:

a) $\{M_i, x_j\}$, $\{M_i, p_j\}$, $\{M_i, M_j\}$;

b) $\{\mathbf{ap}, \mathbf{br}\}$, $\{\mathbf{aM}, \mathbf{br}\}$, $\{\mathbf{aM}, \mathbf{bM}\}$;

c) $\{\mathbf{M}, \mathbf{rp}\}$ $\{\mathbf{p}, r^n\}$, $\{\mathbf{p}, (\mathbf{ar})^2\}$.

x_i, p_i, M_i sont ici les composantes cartésiennes des vecteurs, **a**, **b** des vecteurs constants.

10.15. Calculer $\{A_i, A_j\}$, où

$$A_1 = \frac{1}{4}(x^2 + p_x^2 - y^2 - p_y^2), \qquad A_2 = \frac{1}{2}(xy + p_x p_y),$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(xp_y - yp_x), \qquad A_4 = x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2.$$

10.16. Calculer $\{M_i, \Lambda_{jk}\}$, $\{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\}$, où $\Lambda_{ik} = x_i x_k + p_i p_k$.

10.17. Montrer que $\{M_z, \varphi\} = 0$, où φ est une fonction scalaire quelconque de coordonnées et d'impulsions de la particule.

Montrer que $\{M_z, \mathbf{f}\} = [\mathbf{nf}]$, où **f** est une fonction vectorielle de coordonnées et d'impulsions de la particule, **n** le vecteur unité en direction de l'axe z.

10.18. Calculer les crochets de Poisson $\{\mathbf{f}, \mathbf{aM}\}$, $\{\mathbf{fM}, \mathbf{lM}\}$, où $\mathbf{a} = \text{const}$, **f**, **l** les fonctions vectorielles de **r**, **p**.

10.19. Trouver $\{M_\zeta, M_\xi\}$, où M_ζ, M_ξ sont les projections du moment cinétique sur les axes ζ, ξ des coordonnées cartésiennes reliées de façon rigide au solide en rotation.

10.20. Établir les équations de mouvement de la projection M_n (moment cinétique) sur les axes reliés au corps en rotation libre. La fonction de Hamilton est

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\ \beta} (I^{-1})_{\alpha\beta} M_\alpha M_\beta.$$

10.21. Dans ce problème on étudie le modèle de résonance paramagnétique électronique et nucléaire (voir [18], ch. IX). La fonction de Hamilton d'une sphère aimantée plongée dans le champ magnétique uniforme $\mathfrak{H}$ prend la forme

$$H = \frac{M^2}{2I} - \gamma \mathbf{M} \mathfrak{H},$$

où I est le moment d'inertie, γ le rapport gyromagnétique.

Établir les équations de mouvement du vecteur moment cinétique $\mathbf{M}$, rechercher la loi de son mouvement dans les cas:

a) $\mathfrak{H} = (0, 0, \mathscr{H}_0)$;

b) $\mathfrak{H} = (\mathscr{H}_1 \cos \omega t, \mathscr{H}_1 \sin \omega t, \mathscr{H}_0)$ et à l'instant initial $\mathbf{M} = -(0, 0, M_0)$.

10.22. Trouver $\{v_i, v_j\}$ pour une particule dans un champ magnétique.

10.23. Démontrer que la valeur de toute fonction de coordonnées et d'impulsions du système $f(p(t), q(t))$ s'exprime au moyen de p et q à l'instant $t = 0$ par la formule

$$f(p(t), q(t)) = f + \frac{t}{1!}\{H, f\} + \frac{t^2}{2!}\{H, \{H, f\}\} + \ldots,$$

où

$$f = f(p(0), q(0)), \text{ tandis que } H = H(p(0), q(0))$$

est la fonction de Hamilton. (La série est supposée convergente.)

Calculer, à l'aide de cette formule, $p(t)$, $q(t)$, $p^2(t)$, $q^2(t)$ pour:

a) une particule dans un champ uniforme;

b) un oscillateur.

10.24. Démontrer les égalités

a) $\{f(p_1, q_1), \Phi(\varphi(p_1, q_1), p_2, q_2, \ldots)\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\{f, \varphi\}$;

b) $\{f(p_1, q_1, p_2, q_2), \Phi(\varphi(p_1, q_1, p_2, q_2), p_3, q_3, \ldots)\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \{f, \varphi\}$;

c) $\{f(p, q), \Phi(\varphi_1(p, q), \varphi_2(p, q) \ldots\} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i}\{f, \varphi_i\}$.

10.25. a) Soit une fonction de Hamilton qui ne dépend des variables q_1, p_1 que par l'intermédiaire de la fonction $f(q_1, p_1)$

$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, p_2, \ldots, q_N, p_N).$$

Démontrer que $f(q_1, p_1)$ est l'intégrale de mouvement.

b) Trouver les intégrales de mouvement de la particule dans le champ $U = \frac{\mathbf{ar}}{r^3}$ (utiliser les coordonnées sphériques).

10.26. Il est bien entendu que pour une particule dans le champ $U = -\alpha/r$ il existe une intégrale de mouvement

$$\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}.$$

a) Calculer les crochets de Poisson $\{A_i, A_j\}$, $\{A_i, M_j\}$.

b) Dans le cas d'un mouvement fini ($E < 0$), calculer pour les vecteurs $\mathbf{J}_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{M} \pm \sqrt{\frac{m}{-2H}}\,\mathbf{A}\right)$ les crochets de Poisson

$$\{H, \mathbf{J}_{1,2}\}, \quad \{J_{1i}, J_{2j}\}, \quad \{J_{1i}, J_{1j}\}, \quad \{J_{2i}, J_{2j}\}$$

en les comparant avec les crochets de Poisson des composantes du moment cinétique $\mathbf{M}$. Exprimer la fonction de Hamilton en fonction de $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{J}_2$.

§ 11. Transformations canoniques

11.1. Rechercher la transformation canonique définie par la fonction génératrice :

a) $F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega(t)\, q^2 \operatorname{cotg} Q.$

Écrire les équations de mouvement en variables Q et P pour un oscillateur harmonique de pulsation $\omega(t)$.

b) $F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega \left[q - \frac{F(t)}{m\omega^2}\right]^2 \operatorname{cotg} Q.$

Écrire les équations de mouvement en variables Q et P pour un oscillateur harmonique sollicité par une force extérieure $F(t)$.

11.2. Trouver la fonction génératrice de la forme $\Psi(p, Q)$, aboutissant à la même transformation canonique que $F(q, P) = q^2 e^P$.

11.3. A quelle condition doit satisfaire la fonction $\Phi(q, P)$ pour qu'on puisse l'utiliser en guise de fonction génératrice de la transformation canonique?

Étudier, en particulier, l'exemple

$$\Phi(q, P) = q^2 + P^2.$$

11.4. Montrer que pour un système à un degré de liberté la rotation dans un espace de phase (q, p) est une transformation canonique.

11.5. Soient de petites oscillations d'un oscillateur anharmonique dont la fonction de Hamilton est

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x p^2$$

et $\alpha x \ll \omega^2$, $\beta x \ll 1$. Choisir les paramètres a et b de la transformation canonique définie par la fonction $\Phi = xP + ax^2P + bP^3$ de manière que la nouvelle fonction de Hamilton ne contienne pas de termes anharmoniques à la précision des termes du premier ordre en $\alpha\omega^{-2}Q$, βQ près et trouver $x(t)$.

11.6. Dans la transformation canonique donnée par la fonction génératrice $\Phi = xP + ax^3P + bxP^3$, on demande de choisir les paramètres a et b de manière que les petites oscillations de l'oscillateur anharmonique $H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta x^4$ deviennent harmoniques en nouvelles variables Q, P. On peut négliger les termes du second ordre en $\beta\omega^{-2}Q^2$ dans la nouvelle fonction de Hamilton.

11.7. Montrer que la transformation

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y}{m\omega}\sin\lambda, \quad y = Y\cos\lambda + \frac{P_x}{m\omega}\sin\lambda,$$

$$p_y = -m\omega X\sin\lambda + P_y\cos\lambda, \quad p_x = -m\omega Y\sin\lambda + P_x\cos\lambda$$

est canonique. Trouver la nouvelle fonction de Hamilton, $H'(P, Q)$, si

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

(comp. avec problème 11.17). Décrire le mouvement d'un oscillateur bidimensionnel pour $Y = P_y = 0$.

11.8. En se servant de la transformation du problème précédent, réduire la fonction de Hamilton d'un oscillateur harmonique isotrope plongé dans un champ magnétique, défini par le potentiel vecteur $\mathbf{A} = (0, \mathscr{H}x, 0)$, à la somme de carrés et trouver la loi de son mouvement.

11.9. En recourant à la transformation canonique, donner la forme diagonale à la fonction de Hamilton d'un oscillateur anisotrope chargé possédant l'énergie potentielle $U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$ et plongé dans un champ magnétique uniforme constant défini par le potentiel $\mathbf{A} = (0, \mathscr{H}x, 0)$.

11.10. En appliquant la transformation canonique du problème 11.7 à des paires de coordonnées normales associées aux ondes stationnaires du système de particules sur un anneau (voir pro-

blème 7.3), rechercher les coordonnées associées aux ondes progressives.

11.11. Montrer que la transformation

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2),$$

$$p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 - Q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2),$$

$$p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2} (-\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2)$$

est canonique. Trouver les équations de Hamilton d'une particule dans le champ magnétique défini par le potentiel vecteur $\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2} y\mathscr{H}, \frac{1}{2} x\mathscr{H}, 0\right)$ en nouvelles variables. Ici $\omega = \frac{e\mathscr{H}}{mc}$.

11.12. Comment interpréter la transformation canonique définie par la fonction génératrice $\Phi(q, P) = \alpha q P$?

11.13. Montrer que la transformation de jauge des potentiels d'un champ électromagnétique est une transformation canonique pour des coordonnées et des impulsions des particules chargées et trouver la fonction génératrice correspondante.

11.14. Comme il est connu, le passage de la fonction de Lagrange $L(q, \dot{q}, t)$ à la fonction $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$, où $f(q, t)$ est une fonction arbitraire, ne modifie pas les équations de Lagrange. Montrer que cette transformation est canonique, et trouver sa fonction génératrice.

11.15. Rechercher la fonction génératrice de la transformation canonique consistant dans le passage de $q(t)$, $p(t)$ à $Q(t) = q(t + \tau)$, $P(t) = p(t + \tau)$, $\tau = \text{const}$ pour:

a) un mouvement non gêné;

b) un mouvement dans un champ uniforme, $U(q) = -Fq$;

c) un oscillateur.

11.16. Interpréter la signification des transformations canoniques définies par les fonctions génératrices:

a) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\mathbf{aP}$;

b) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\varphi\,[\mathbf{rP}]$;

c) $\Phi(q, P, t) = qP + \delta\tau H(q, P, t)$;

d) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\alpha\,(\mathbf{r}^2 + \mathbf{P}^2)$,

où $\mathbf{r}$ sont les coordonnées cartésiennes, tandis que $\delta\mathbf{a}$, $\delta\varphi$, $\delta\tau$, $\delta\alpha$, les paramètres infiniment petits.

11.17. Montrer que la transformation canonique définie par la fonction génératrice

$$\Phi(x, y, P_x, P_y) = xP_x + yP_y + \varepsilon(xy + P_xP_y),$$

où $\varepsilon \to 0$ est une rotation dans l'espace de phase.

11.18. Indiquer les fonctions génératrices des transformations canoniques infiniment petites se ramenant à

a) un mouvement hélicoïdal;

b) une transformation de Galilée;

c) un passage à un référentiel en rotation.

11.19. Une transformation canonique est définie par la fonction génératrice $\Phi(q, P) = qP + \lambda W(q, P)$, où $\lambda \to 0$.

On demande de trouver pour la fonction arbitraire $f(q, p)$, à la précision du premier ordre de petitesse près, la variation de sa grandeur due au changement d'arguments

$$\delta f(q, p) = f(Q, P) - f(q, p).$$

11.20. Trouver $\{H, \mathbf{rp}\}$ pour les endroits où la fonction de Hamilton $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\mathbf{ar}}{r^3}$ et en tirer sur cette base l'intégrale des équations de mouvement. Il est commode d'utiliser dans les calculs les résultats du problème précédent ainsi que du problème 11.12.

11.21. Rechercher la variation de la forme de dépendance de $\mathbf{M}$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{pr}$, $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ de $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ lors des transformations du problème 11.16.

11.22. Montrer que le résultat de deux transformations canoniques successives infiniment petites, définies par les fonctions génératrices

$$\Phi_i(q, P) = qP + \lambda_i W_i(q, P), \quad \lambda_i \to 0, \quad i = 1, 2,$$

ne dépend pas de l'ordre suivi au cours de leur exécution (à la précision du second ordre de petitesse près), au cas où

$$\{W_1(q, p), W_2(q, p)\} = 0.$$

11.23. Trouver la transformation canonique résultant de l'exécution successive d'un nombre infiniment grand N d'infiniment petites transformations canoniques définies par la fonction

$$\Phi(q, P) = qP + \frac{\lambda}{N} W(q, P), \quad \lambda = \text{const}, \quad N \to \infty:$$

a) $W(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = [\mathbf{rP}]\,\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \text{const};$

b) $W(x, y, P_x, P_y) = A_i,$

où A_i est défini dans le problème 10.15.

Conseil. Écrire et résoudre pour des W concrets les équations différentielles pour $Q(\lambda)$, $P(\lambda)$.

11.24. a) Comment varient avec le temps le volume, le volume dans l'espace du momentum et le volume de phase occupés par un groupe de particules en mouvement non gêné sur l'axe x? A l'instant initial les coordonnées des particules sont comprises dans l'intervalle $x_0 < x < x_0 + \Delta x_0$, les impulsions occupant l'intervalle $p_0 < p < p_0 + \Delta p_0$.

b) Même question pour les particules se déplaçant sur l'axe x entre deux murs. Les chocs avec les murs sont absolument élastiques. Les particules n'interagissent pas l'une avec l'autre.

c) Même question pour un groupe d'oscillateurs harmoniques.

d) Même question pour un groupe d'oscillateurs harmoniques avec frottement.

e) Même question pour un groupe d'oscillateurs anharmoniques.

f) On décrira la distribution des particules dans l'espace des phases à l'instant t au moyen de la fonction de distribution $w(x, p, t)$, pour laquelle le nombre de particules de coordonnées comprises dans l'intervalle $x - x + dx$ et d'impulsions comprises dans l'intervalle $p - p + dp$ est $w(x, p, t)\, dx\, dp$. On demande de déterminer la fonction de distribution d'un groupe de particules libres et d'un groupe d'oscillateurs harmoniques au cas où à l'instant initial

$$w(x, p, 0) = \frac{1}{2\pi\Delta p_0 \Delta x_0} \exp\left\{-\frac{(x-X_0)^2}{2\Delta x_0^2} - \frac{(p-P_0)^2}{2\Delta p_0^2}\right\}.$$

11.25. Introduisons la variable

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}\, e^{i\omega t}.$$

a) Trouver les crochets de Poisson $\{a^*, a\}$. Exprimer en fonction de a et a^* la fonction de Hamilton d'un oscillateur harmonique

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

b) Montrer que $Q = a$ et $P = ia^*$ sont des variables canoniques. Trouver la nouvelle fonction de Hamilton $H_0'(Q, P)$.

c) Trouver la moyenne de la fonction de Hamilton $H'(Q, P)$ sur la période des oscillations rapides $2\pi/\omega$ pour un oscillateur ayant reçu une adjonction anharmonique à l'énergie potentielle $\delta U = \frac{1}{4} m\beta x^4$.

En utilisant la fonction de Hamilton moyenne, rechercher les variations lentes des variables Q et P.

d) Étudier la loi de variation de l'amplitude d'oscillations de l'oscillateur sollicité par une force de résonance non linéaire

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + m^2\omega^2 \alpha x^4 \cos 4\omega t.$$

11.26. Étudier la variation de l'amplitude d'oscillations d'un système de trois oscillateurs à faible liaison linéaire :

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2 + \alpha xyz),$$

si $|\omega_1 - \omega_2 - \omega_3| \ll \omega_1$, $|\alpha x| \ll \omega_1^2$. Examiner en détail le cas quand à l'instant initial $|y| \ll |x|$, $z = 0$, $\dot{y} = \dot{z} = 0$.

Se servir de la même méthode que dans le problème précédent.

11.27. La fonction de Hamilton d'un oscillateur anharmonique sollicité par une action paramétrique prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(1 + h\cos 2\gamma t)\, x^2 + \frac{m\beta x^4}{4}.$$

Introduisons les variables canoniques

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}\, e^{i\gamma t}, \quad P = ia^*.$$

a) Trouver la nouvelle fonction de Hamilton $H'(a, P, t)$ et établir sa moyenne sur la période des oscillations rapides $2\pi/\gamma$.

b) Étudier la variation de l'amplitude des oscillations dans le domaine de résonance $|\gamma - \omega| \ll h\omega$, $h \ll 1$, si à l'instant initial la quantité a est voisine de zéro.

11.28. a) Vérifier que la transformation

$$x = Q\cos\gamma t + \frac{1}{m\omega} P \sin\gamma t,$$

$$p = -m\omega Q \sin\gamma t + P\cos\gamma t$$

est canonique. Obtenir la nouvelle fonction de Hamilton $H'(Q, P, t)$ pour un oscillateur avec excitation paramétrique :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}(1 - h\cos 2\gamma t).$$

b) Prendre la moyenne de $H'(Q, P, t)$ sur la période $2\pi/\gamma$ et étudier qualitativement le mouvement du point sur le plan des phases Q, P. Poser $h \ll 1$, $\varepsilon = 1 - \gamma/\omega \ll 1$.

§ 12. Équation de Hamilton-Jacobi

12.1. Trouver la trajectoire et la loi de mouvement d'une particule dans le champ $U(\mathbf{r})$ à l'aide de l'équation de Hamilton-Jacobi :

a) $U(\mathbf{r}) = -Fx$;

b) $U(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2}$

12.2. Déterminer la trajectoire et la loi de mouvement d'une particule diffusée dans le champ $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\mathbf{r}/r^3$. La trajectoire s'exprimera en quadratures et, au cas de $E\rho^2 \gg a$, de façon analytique. La vitesse des particules avant la diffusion est dirigée dans le sens opposé au vecteur $\mathbf{a}$.

12.3. Rechercher la section de diffusion en de petits angles des particules dont la vitesse avant la diffusion est dirigée dans le sens opposé à l'axe z dans le champ $U(\mathbf{r})$:

a) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{a\cos\theta}{r^2}$;

b) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{b\cos^2\theta}{r^2}$;

c) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{b(\theta)}{r^2}$.

12.4. Rechercher la section de chute des particules au centre du champ $U(\mathbf{r})$:

a) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r^3}$; b) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r^3} + \dfrac{\lambda}{r}$;

c) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r^3} - \dfrac{\gamma}{r^4}$; d) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{b(\theta)}{r^2}$.

Prendre la moyenne de la section en supposant que toutes les directions de $\mathbf{a}$ sont équiprobables.

12.5. Trouver la section de chute des particules sur une bille de rayon R placée au centre du champ $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\mathbf{r}/r^3$.

12.6. Déterminer la trajectoire et les lois de mouvement des particules diffusées et chutant au centre du champ $U(\mathbf{r})$. La trajectoire doit être exprimée en quadratures et, si $E\rho^2 \gg a$, analytiquement.

Pour le premier champ, trouver l'expression analytique de la trajectoire des particules chutant au centre avec $E\rho^2 \ll a$. La vitesse des particules avant la diffusion est parallèle à l'axe z.

a) $U(\mathbf{r}) = \dfrac{a\cos\theta}{r^2}$;

b) $U(\mathbf{r}) = -\dfrac{a(1+\sin\theta)}{r^2}$.

12.7. Trouver la trajectoire et la loi de mouvement de la particule chutant au centre du champ $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\mathbf{r}/r^3$. A l'infini la particule est lancée le long de la droite $y = \rho$, $x = -z\,\mathrm{tg}\,\alpha$, où ρ est le paramètre d'impact (le vecteur $\mathbf{a}$ est parallèle à l'axe z, les coordonnées sphériques initiales de la particule sont $r = \infty$, $\theta = \pi - \alpha$, $\varphi = 0$). La trajectoire doit être exprimée en quadratures et, pour $\alpha^2 < \dfrac{2E\rho^2}{a} \ll 1$, analytiquement.

12.8. a) Déterminer la trajectoire (exprimer en quadratures) du mouvement fini d'une particule dans le champ $U(\mathbf{r}) = \frac{a\cos\theta}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$ pour $M_z = 0$.

b) Même problème pour le champ $U(\mathbf{r}) = \frac{a\cos\theta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}$.

12.9. A quelle condition la trajectoire trouvée au problème précédent s'avère fermée?

12.10. Décrire qualitativement la nature du mouvement d'une particule et l'aspect des trajectoires dans le champ

$$U(\mathbf{r}) = \frac{a\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\alpha}{r}.$$

12.11. Pour quelles valeurs du moment cinétique M_z de la particule le mouvement dans le champ $U(\mathbf{r})$ peut devenir fini?

a) $U(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{r^4} - \frac{b\cos^2\theta}{r^2}$;

b) $U\ \mathbf{r}) = \frac{b\cos^2\theta}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$.

Quel est dans ce cas l'aspect de la trajectoire?

12.12. Trouver l'équation de la trajectoire et la loi de mouvement d'une particule dans le champ $U(\mathbf{r})$ en coordonnées paraboliques:

a) $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$;

b) $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \mathbf{F}\mathbf{r}$.

Dans le cas b) se limiter à l'étude du mouvement fini, la trajectoire et la loi de mouvement doivent être exprimées en quadratures.

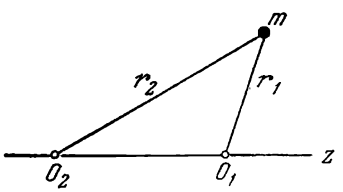


Fig. 63

12.13. A l'intérieur d'un ellipsoïde de révolution lisse et élastique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ se meut une particule lancée à partir de l'origine des coordonnées sous un angle α par rapport à l'axe z. Rechercher les régions de l'ellipsoïde inaccessibles à la particule.

12.14. Trouver la trajectoire d'une particule (exprimer en quadratures) dans le champ de deux centres coulombiens $U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}$ (fig. 63) si la vitesse de la particule à l'infini est parallèle à l'axe O_2O_1z. Décrire le mouvement de la particule « chutant » sur le « dipôle » formé par ces centres.

12.15. Une courte lentille magnétique est engendrée par un champ défini par le potentiel vecteur $A_\varphi = \frac{1}{2} r\mathscr{H}_z(z)$, $A_r = A_z = 0$ ($\mathscr{H}_z(z)$ étant différent de zéro dans la région $|z| < a$). Du point $(0, 0, z_0)$ sur la lentille est dirigé un faisceau d'électrons voisins de l'axe z. Rechercher le point $(0, 0, z_1)$ de la focalisation du faisceau. On admet que $z_0, z_1 \gg a$.

Conseil. L'intégrale de l'équation de Hamilton-Jacobi doit être recherchée en forme de puissances de r

$$S(r, \varphi, z, t) = -Et + p_\varphi \varphi + f(z) + r\psi(z) + \frac{r^2}{2}\sigma(z) + \ldots$$

12.16. Une lentille magnétique est engendrée par un champ défini par le potentiel vecteur $A_\varphi = \frac{1}{2} r\mathscr{H}_z(z)$, $A_r = A_z = 0$, où $\mathscr{H}_z(z) = \frac{\mathscr{H}}{1+\varkappa^2 z^2}$. Du point $(0, 0, z_0)$ sur la lentille est dirigé un faisceau d'électrons voisins de l'axe z. Trouver les points de focalisation de ce faisceau.

Conseil. L'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi doit être recherchée en forme de décomposition suivant r.

12.17. De quelle manière peut être obtenue l'action comme une fonction de coordonnées et du temps en connaissant l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi?

12.18. Formuler et démontrer le théorème de l'intégration des équations de mouvement en recourant à l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial S}{\partial p}, p, t\right) = 0,$$

où $H(q, p, t)$ est la fonction de Hamilton. (Équation de Hamilton-Jacobi en représentation p.)

12.19. A l'aide de l'équation de Hamilton-Jacobi en représentation p trouver la trajectoire et la loi du mouvement de la particule dans un champ uniforme.

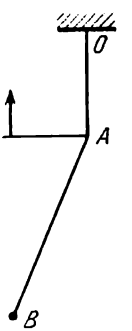


Fig. 64

§ 13. Invariants adiabatiques

13.1. Sur un fil passé à travers l'anneau A (fig. 64) est suspendue une particule de masse m. Déterminer la force moyenne sollicitant de la part du fil l'anneau A au cours de petites oscillations du pendule. Rechercher la variation de l'énergie du pendule au cours d'un lent déplacement vertical de l'anneau.

13.2. Une particule se meut dans un puits de potentiel rectangulaire de largeur l. Rechercher comment varie l'énergie de la particule avec un lent changement de l en considérant les collisions de la particule avec le « mur » du puits.

13.3. Une bille placée dans un ascenseur rebondit sur une plaque élastique. Comment varie la hauteur maximale du rebond de la bille au cas d'une lente accélération de l'ascenseur? Comment varie la hauteur dans le cas d'une lente élévation de la plaque?

13.4. Comment varie l'énergie d'une particule dans le champ U au cours d'un lent changement des paramètres du champ?

a) $U = A\,(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$; b) $U = -\dfrac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$;

c) $U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$; d) $U = A|x|^n$.

Conseil. Il peut s'avérer commode d'utiliser la formule ([1], § 49)

$$T = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E}.$$

13.5. Une particule se meut sur un plan incliné AB (fig. 65) en réfléchissant élastiquement sur le mur au point A. Trouver com-

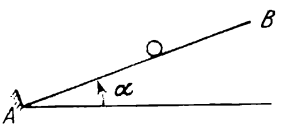


Fig. 65

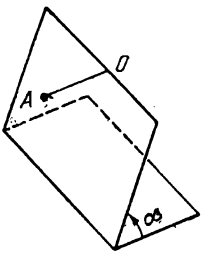


Fig. 66

ment varie la hauteur maximale de l'élévation de la particule avec une lente modification de l'angle α.

13.6. Comment varie l'amplitude des oscillations du pendule OA (fig. 66) situé dans un plan incliné au cours d'un lent changement de l'angle α?

13.7. Rechercher l'invariant adiabatique d'un pendule mathématique (simple) sans supposer les oscillations petites.

Fig. 67

Fig. 68

13.8. Deux particules peuvent se mouvoir le long d'une droite OA (fig. 67). Les particules sont des billes élastiques de petit rayon dont les masses sont respectivement m et M, avec $m \ll M$. Au point O la particule m est réfléchie sur le mur élastique. En admettant qu'à l'origine la vitesse de la particule légère est beaucoup plus grande que celle de la particule lourde, on demande de déterminer la loi

de mouvement de la particule lourde sous l'angle de la moyenne sur la « période » du mouvement de la particule légère.

13.9. Dans ce problème on examine le modèle de l'ion H_2^+. Deux particules de masse M et une particule de masse $m \ll M$ se trouvant entre les deux premières ne peuvent se mouvoir que le long de la droite AB (fig. 68). La particule légère est attirée par chacune des particules lourdes avec des forces constantes f et, après collision, se réfléchit élastiquement. Déterminer la fréquence des petites oscillations de la distance de l'« ion » séparant les particules lourdes (la moyenne étant prise sur le mouvement de la particule légère).

13.10. Résoudre par la méthode des approximations successives les équations du problème 11.1,a pour P et Q au cas d'une lente variation de la pulsation ($\dot{\omega} \ll \omega^2$, $\ddot{\omega} \ll \dot{\omega}\omega$), à la précision jusqu'au premier ordre en $\dot{\omega}/\omega^2$ inclus près.

En quoi réside dans ce cas l'avantage des variables P, Q devant p, q?

13.11. Vérifier que $q = \omega^{-1/2} \exp i \int \omega\, dt$ satisfait à l'équation $\ddot{q} + \omega^2(t)\, q = 0$ avec la précision jusqu'au premier ordre en $\dot{\omega}/\omega^2$ inclus près.

13.12. L'oscillateur est sollicité par la force $F(t)$. Trouver la dépendance de l'invariant adiabatique $I = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dq$ du temps.

13.13. Trouver la liaison entre le volume et la pression du « gaz » composé de particules se mouvant parallèlement aux arêtes au sein d'un cube dont les dimensions varient lentement.

13.14. Une particule est mobile à l'intérieur d'un parallélépipède élastique. Comment varie l'énergie de la particule si :

a) les dimensions du parallélépipède se modifient lentement,

b) le parallélépipède pivote lentement?

13.15. Une particule est mobile au sein d'une sphère aux parois élastiques dont le rayon varie lentement. Comment varie dans ce cas l'énergie de la particule ainsi que l'angle sous lequel elle percute la paroi?

13.16. Comment varient l'énergie et la trajectoire de la particule accomplissant un mouvement fini dans le champ $U(\mathbf{r})$ au cours d'un lent changement du coefficient γ?

a) $U = -\gamma r^{-n}$ $(0 < n < 2)$;

b) $U = \frac{ar}{r^3} + \frac{\gamma}{r^4}$.

13.17. Rechercher la variation de l'énergie d'une particule dans un champ central au cours d'« introduction » lente d'une petite adjonction au champ $\delta U(r)$.

13.18. Trouver la dépendance du temps de l'énergie d'un système de deux oscillateurs accouplés dont la fonction de Lagrange a l'aspect

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2 + 2\alpha xy)$$

dans une lente variation de ω_1. Comment varie la trajectoire du point (x, y)?

13.19. La liaison des oscillateurs du problème précédent est supposée faible : $\alpha \ll \omega_{1,\,2}^2$. Montrer que les invariants adiabatiques, calculés en négligeant la liaison, se conservent au-delà du domaine de dégénérescence ($\omega_1 = \omega_2$) et subissent un bond brusque au cours d'une lente traversée de ce domaine.

13.20. Dans quelle région $\omega_1(t)$ les invariants adiabatiques des oscillateurs se modifieront fortement quand la liaison prend la forme $\delta U = \beta x^2 y$?

13.21. Déterminer la distance minimale à laquelle se rapprochera de l'arête de l'angle dièdre α une particule réfléchie élastiquement sur ses faces. A la distance l de l'arête, l'angle d'incidence de la particule engendré avec la face est φ_0.

On demande de résoudre le problème par deux procédés : en recourant à la méthode des réflexions (de façon précise) et à l'aide de l'invariant adiabatique, dans le cas de α et φ_0 petits.

13.22. Déterminer les limites du domaine dans lequel se meut entre deux surfaces élastiques $y = 0$ et $y = \frac{a \operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} 2\alpha x}$ une particule lancée à partir de l'origine des coordonnées sous l'angle φ par rapport à l'axe y dans le plan xy (α, $\varphi \ll 1$), ainsi que la période d'oscillations suivant l'axe x.

13.23. Comment se modifient le rayon et la position du centre de l'orbite d'une particule chargée se mouvant dans un champ magnétique uniforme qui varie lentement en grandeur? Choisir le potentiel vecteur sous la forme

a) $\mathbf{A} = (0, \mathscr{H}x, 0)$;

b) $A_r = A_z = 0, \quad A_\varphi = \frac{1}{2}\mathscr{H}r.$

Expliquer pourquoi le résultat est fonction du choix de $\mathbf{A}$.

13.24. Calculer les invariants adiabatiques d'un oscillateur chargé plongé dans un champ magnétique uniforme.

13.25. a) Déterminer les invariants adiabatiques d'un oscillateur harmonique anisotrope chargé à énergie potentielle $U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$ plongé dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{\mathscr{H}}$ parallèle à l'axe z. Choisir le potentiel vecteur sous la forme $\mathbf{A} = (0, \mathscr{H}x, 0)$.

b) Admettons qu'au début $\mathcal{H} = 0$ et que la trajectoire de l'oscillateur remplit le rectangle $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Quel sera son mouvement si le champ magnétique augmente lentement et atteint une grande valeur (telle que $\omega_{\mathcal{H}} = e\mathcal{H}/mc \gg \omega_{1,2}$)?

c) Le champ magnétique est supposé faible ($\omega_{\mathcal{H}} \ll \omega_1 - \omega_2$), l'oscillateur au début oscillant presque au voisinage de l'axe x. Quel sera son mouvement quand la grandeur ω_1, en diminuant lentement, atteindra la valeur $\omega_1' < \omega_2$ pour laquelle $\omega_{\mathcal{H}} \ll \omega_2 - \omega_1'$?

13.26. Une particule accomplit un mouvement fini dans le plan perpendiculaire au champ magnétique du dipôle **m**. Comment varie l'énergie de la particule avec un lent changement de la grandeur **m**?

13.27. Rechercher la période d'oscillations de l'électron sur l'axe du piège magnétique. Le champ magnétique du piège est symétrique par rapport à l'axe z, avec $\mathcal{H}_\varphi = 0$, $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_z(z)$, $\mathcal{H}_r = -\frac{r}{2}\mathcal{H}_z'(z)$.

a) $\mathcal{H}_z(z) = \mathcal{H}_0\left(1 + \lambda \operatorname{th}^2 \frac{z}{a}\right)$;

b) $\mathcal{H}_z(z) = \mathcal{H}_0\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)$.

13.28. Comment varieront l'énergie de l'électron et la période de ses oscillations suivant l'axe z au sein du piège magnétique décrit au problème précédent dans une lente variation des paramètres du champ $\mathcal{H}_0$, λ, a?

13.29. Rechercher la variation de l'énergie d'une particule dans le champ central $U(r)$ avec un lent amorçage du champ magnétique uniforme $\mathcal{H}$.

13.30. Comme il est connu, en cas de dégénérescence du mouvement le nombre d'intégrales univalentes de mouvement augmente. Indiquer les intégrales de mouvement dans le champ

$$U = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + 4y^2).$$

13.31. Rechercher les variables angulaires pour les systèmes suivants:

a) un oscillateur;

b) une particule dans le champ $U(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } x < 0, \\ Fx & \text{pour } x > 0. \end{cases}$

13.32. Pour une particule plongée dans le champ périodique

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } na < x < \left(n + \frac{1}{2}\right)a, \\ V & \text{pour } \left(n + \frac{1}{2}\right)a < x < (n+1)a, \end{cases}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

au cas où $E > V$, effectuer la transformation canonique avec la fonction génératrice

$$S(x, P) = \int_0^x \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx,$$

où $E(P)$ se déduit de l'égalité

$$P = \int_0^a \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx.$$

§ 1. Intégration d'équations de mouvement des systèmes à un degré de liberté

1.1. a) D'après les valeurs initiales de x (0) et $\dot{x}$ (0) on détermine l'énergie de la particule E. Son mouvement subséquent s'obtient à partir de la loi de conservation de l'énergie

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E. \tag{1}$$

Pour $E \geqslant 0$ la particule peut se mouvoir dans le domaine $x \geqslant x_1$, le mouvement étant infini ($E = E'$ sur la fig. 69). Pour $E < 0$

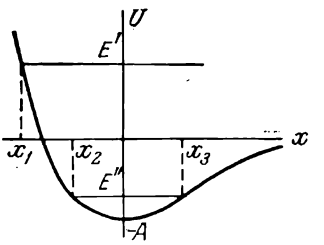


Fig. 69

($E = E''$) la particule se meut dans le domaine $x_2 \leqslant x \leqslant x_3$, le mouvement étant fini. Les points de rotation se déterminent à partir de la formule (1) $U(x_i) = E$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\sqrt{A(A+E)} - A}{E} && \text{pour } E > 0, \\ x_1 &= -\frac{\ln 2}{\alpha} && \text{pour } E = 0, \\ x_{2,3} &= \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A \mp \sqrt{A(A - |E|)}}{|E|} && \text{pour } E < 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

De (1) il vient

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x(0)}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}. \tag{3}$$

Soit

$$x(t)=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{A-\sqrt{A(A-|E|)}\cos(\alpha t\sqrt{2|E|/m}+C)}{|E|} \quad \text{pour } E<0, \tag{4}$$

$$x(t)=\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{A\alpha^2}{m}(t+C)^2\right] \quad \text{pour } E=0, \tag{5}$$

$$x(t)=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\sqrt{A(A+E)}\,\mathrm{ch}(\alpha t\sqrt{2E/m}+C)-A}{E} \quad \text{pour } E>0. \tag{6}$$

Les constantes C se déterminent par les valeurs initiales $x(0)$, par exemple, pour (4) avec $\dot{x}(0)>0$

$$C=\arccos\frac{A-|E|\,e^{\alpha x(0)}}{\sqrt{A-(A-|E|)}}$$

Les points de rotation (2) s'obtiennent aussi facilement de (4)-(6).

Pour $E<0$ le mouvement selon (4) est périodique de période $T=\frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{|E|}}$. Si E est voisin de la valeur minimale de $U(x)$, égale à $U_{\min}=U(0)=-A$ $\left(\text{c'est-à-dire que } \varepsilon=\frac{A-|E|}{A}\ll 1\right)$, la période $T\approx T_0\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $T_0=\frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{A}}$ dépendant faiblement de E. Dans ce cas on peut écrire (4) ainsi :

$$x(t)=-\frac{1}{\alpha}\ln(1-\varepsilon)+\frac{1}{\alpha}\ln\left[1-\sqrt{\varepsilon}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+C\right)\right]\approx$$

$$\approx-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+C\right). \tag{7}$$

La particule effectue alors des oscillations harmoniques près du point $x=0$ d'amplitude $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha}$ définie par la différence $E-U_{\min}$ et de pulsation indépendante de l'énergie. Un tel mouvement pour E voisin de $U_{\min}$ s'observe dans presque tout champ $U(x)$. (Pour plus de détail voir § 5.)

Pour $E\geqslant 0$ la particule venant de droite arrive au point de rotation x_1 (voir (2)), revient en arrière et s'éloigne à l'infini. Dans ces conditions sa vitesse tend avec le temps vers $\sqrt{2E/m}$ par le haut.

b) $x(t) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arsh}\left[\sqrt{\frac{|E|+U_0}{|E|}} \sin\left(\alpha t \sqrt{2|E|/m} + C\right)\right]$ pour $E < 0$,

$x(t) = \pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arsh}\left[\sqrt{\frac{E+U_0}{E}} \operatorname{sh}\left(\alpha t \sqrt{2E/m} + C\right)\right]$ pour $E > 0$,

$x(t) = \pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arsh}\left(\alpha t \sqrt{2U_0/m} + C\right)$ pour $E = 0$ *).

c) $x(t) = \frac{1}{\alpha} \arcsin\left[\sqrt{\frac{E}{E+U_0}} \sin\left(\alpha t \sqrt{\frac{2(U_0+E)}{m}}\right) + C\right]$.

Pour quelle raison dans certaines formules de réponses fournies le signe est double?

1.2. $x(t) = \frac{x_0}{1 \pm t x_0 \sqrt{2A/m}}$, $x_0 = x(0)$. Le signe au dénominateur est opposé au signe de $\dot{x}(0)$. Pour concrétiser, posons $\dot{x}(0) > 0$. Pour $\dot{x}(0) > 0$ la particule s'éloigne à l'infini durant le temps $\sqrt{m/2Ax_0^2}$. En fait il ne peut s'agir que d'une grande distance quoique finie, à laquelle s'étend le champ donné $U(x)$.

Pour $\dot{x}(0) < 0$ la particule s'approche asymptotiquement du point $x = 0$.

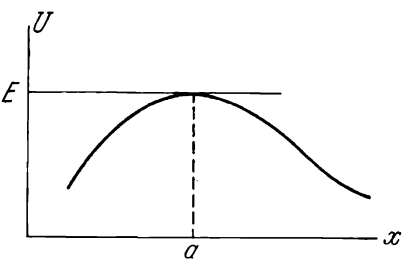


Fig. 70

1.3. Près du point d'arrêt $U(x) = E - (x-a)F$, où $F = -U'(a)$, on peut donc considérer que le mouvement s'effectue sous l'action de la force constante F. En posant $x(0) = a$, on obtient

$$x(t) = a + \frac{Ft^2}{2m}.$$

La précision de cette formule s'atténue avec l'éloignement du point $x = a$.

La particule franchit le petit tronçon de chemin s, éloigné du point d'arrêt, en un temps $\tau \backsim s$. Si, par contre, le tronçon de chemin est adjacent au point d'arrêt, il faut, pour le franchir, le temps $\tau = \sqrt{2ms/|F|}$, c'est-à-dire $\tau \backsim \sqrt{s}$.

Si $U'(a) = 0$ (fig. 70), le développement de $U(x)$ doit être poursuivi jusqu'au terme suivant:

$$U(x) = E + \frac{1}{2} U''(a)(x-a)^2.$$

*) $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Dans ce cas $x(t) = a + se^{\pm\lambda t}$, où $s = x(0) - a$, $\lambda^2 = -\frac{U''(a)}{m}$, tandis que le signe de l'exposant se détermine d'après la direction de la vitesse à l'instant initial. Pour franchir le tronçon de chemin jusqu'au point d'arrêt, la particule exige un temps infiniment grand.

1.4. Si $U''(a) \neq 0$, alors $T \backsim \ln \varepsilon$, où $\varepsilon = U_m - E$. Si $U''(a) = \ldots$ $\ldots = U^{n-1}(a) = 0$, $U^{(n)}(a) \neq 0$, alors $T \backsim \varepsilon^{-\frac{n-2}{2n}}$.

1.5. a) Pour un petit $\varepsilon = E - U_m$ la particule se meut le plus lentement près du point $x = a$. Aussi peut-on également apprécier toute la période de mouvement T d'après le temps T_1 de franchissement (aller et retour) du petit voisinage de ce point $a - \delta < x < a + \delta$:

$$T_1 = \sqrt{2m} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \approx T.$$

Au voisinage de $x = a$ admettons que $U(x)$ prend la forme $U(x) = U_m - \frac{1}{2}k(x-a)^2$, où $k = -U''(a)$. Pour ε suffisamment petit, on peut choisir δ de manière que la vitesse v soit aux bornes de l'intégrale beaucoup supérieure à la minimale (pour $x = a$)

$$\frac{mv^2}{2} \sim \frac{k\delta^2}{2} \gg \varepsilon$$

et qu'en même temps on ait $\delta \ll L = x_2 - x_1$, c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}} \ll \delta \ll L = x_2 - x_1.$$

Alors

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \ln \frac{2k\delta^2}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Le temps T_2 du mouvement de la particule sur les tronçons $x_1 < x < a - \delta$ et $a + \delta < x < x_2$ satisfait à la condition

$$T_2 \lesssim \frac{L}{v} \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{L}{\delta}.$$

Avec la diminution de ε la grandeur T_1 s'accroît, donc pour des ε suffisamment petits $T_2 \leqslant T_1$ et, pour l'estimation de la période de mouvement, on peut se servir de la formule (1). Cette formule est dotée d'une précision asymptotique. Son erreur relative tend vers zéro comme $\ln^{-1} \varepsilon$ quand $\varepsilon \to 0$. Mais avec la même précision logarithmique on peut substituer dans (1) L à δ et laisser tomber le facteur 2 sous le signe du logarithme:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \ln \frac{kL^2}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Si $U''(a)=0$, $U^{(4)}=-K\neq 0$, alors

$$T=4\left(\frac{6m^2}{\varepsilon K}\right)^{1/4}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=11{,}6\left(\frac{m^2}{\varepsilon K}\right)^{1/4},$$

l'erreur relative tendant vers zéro comme $\varepsilon^{1/4}$ quand $\varepsilon\to 0$.

b) Si l'on observe le mouvement de la particule durant un temps grand devant la période T, la probabilité de trouver la particule sur le tronçon allant de x à $x+dx$ est

$$w(x)dx=2\frac{dt}{T}=\frac{\sqrt{2m}\,dx}{T\sqrt{E-U(x)}},$$

où $2dt$ est le temps de la découverte de la particule sur le tronçon dx durant la période. La dépendance de la densité de probabilité de la coordonnée w de x est donnée sur la figure 71.

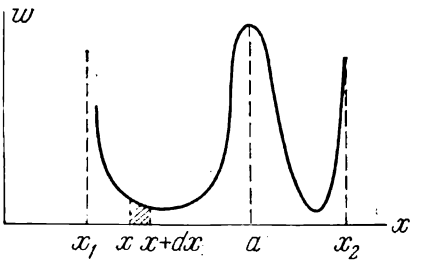


Fig. 71

A la probabilité envisagée $w(x)dx$ correspond l'aire hachurée (toute l'aire sous la courbe est égale à l'unité). Pour des ε suffisamment petits, l'apport principal à l'aire sous la courbe est fourni

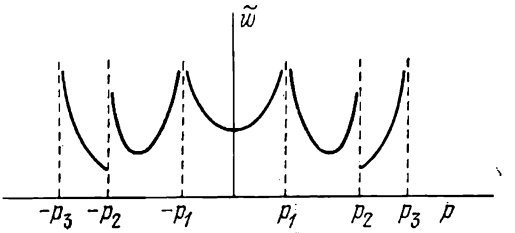


Fig. 72

par l'aire sous le maximum central, égale à T_1/T. Bien que $w(x)\to\infty$ quand $x\to x_{1,2}$, la contribution des tronçons voisins des points d'arrêt est relativement minime.

c) $$\tilde{w}(p)\,dp=\frac{1}{T}\sum_k\left|\frac{dt_k}{dp}\right|dp=\frac{1}{T}\sum_k\frac{dp}{\left|\frac{dU(x_k)}{dx}\right|},$$

où $x_k=x_k(p)$ sont des racines différentes de l'équation $\frac{p^2}{2m}+U(x)=E$.

La figure 72 donne le graphique de $\tilde{w}(p)$, $p_1=\sqrt{2m(E-U_m)}$, $p_2=\sqrt{2m[E-U(c)]}$, $p_3=\sqrt{2m[E-U(b)]}$.

d) Sur la figure 73 on a représenté les lignes $E(x, p) = \text{const}$ (trajectoires des phases de la particule); les courbes y sont numérotées dans l'ordre de croissance de l'énergie. Pour $U(c) \leqslant E < U_m$ la trajectoire de phases 2 est à double liaison. Les flèches indiquent la direction du mouvement du point figurant l'état de la particule.

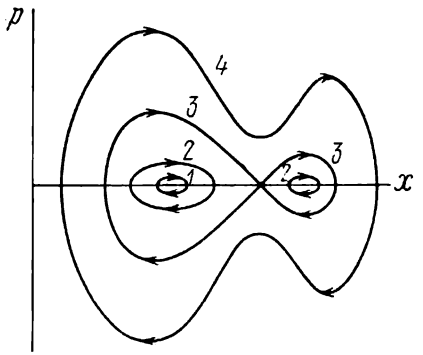


Fig. 73

1.6. On choisit pour origine de l'énergie potentielle le point inférieur. Pour $E = 2mgl$ on a

$$\varphi(t) = -\pi + \\ + 4 \operatorname{arctg}\left(e^{\pm t\sqrt{g/l}} \operatorname{tg} \frac{\varphi(0)+\pi}{4}\right)$$

(φ est l'angle d'écart du pendule de la position inférieure). Le signe dans l'exposant coïncide avec celui de $\dot{\varphi}(0)$. Le pendule se rapproche asymptotiquement de la position supérieure.

Pour $0 < E - 2mgl \ll 2mgl$, le pendule tourne en dépassant lentement la position du haut. On peut apprécier la période de révolution en utilisant le résultat (2) du problème précédent:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{\varepsilon_0}{E - 2mgl};$$
$$\varepsilon_0 = 4\pi^2 mgl.$$

1.7. L'écart angulaire du pendule est lu à partir de la position du bas. L'énergie $E = \frac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi)$. Posons qu'à l'instant t_0 l'angle $\varphi(t_0) = 0$, et, pour être plus concret, $\dot{\varphi}(t_0) > 0$. En introduisant $k = \sqrt{E/2mgl}$, il vient

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} + t_0. \qquad (1)$$

Pour $k < 1$ le pendule oscille entre $-\varphi_m \leqslant \varphi \leqslant \varphi_m$ et $k = \sin\frac{\varphi_m}{2}$. Après substitution de $\sin\xi = \frac{1}{k}\sin\frac{\varphi}{2}$ l'intégrale (1) prend la forme*) $t = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\xi, k) + t_0$.

---

*) La fonction $F(\xi, k) = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}}$ est l'intégrale elliptique du premier ordre. Si $u = F(\xi, k)$, ξ s'exprime au moyen de l'une des fonctions

De là on tire

$$\varphi = 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(u, k)], \quad u = (t - t_0) \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

La période d'oscillation

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\sin \frac{\varphi_m}{2}\right).$$

Dans les cas limites (comp. avec problème 1.4)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_m^2}{16}\right) \quad \text{pour} \quad \varphi_m \ll 1,$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m} \quad \text{pour} \quad \pi - \varphi_m \ll 1.$$

Pour $k > 1$ le pendule n'oscille pas mais effectue des rotations. De (1) on obtient

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{1}{k}\right) + t_0,$$

$$\varphi = 2 \operatorname{Arcsin} \operatorname{sn}\left(u, \frac{1}{k}\right), \quad u = k(t - t_0) \sqrt{\frac{g}{l}}$$

La période de révolution

$$T = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\frac{1}{k}\right).$$

En particulier, pour $E - 2mgl \ll 2mgl$, on obtient

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{\varepsilon_0}{E - 2mgl},$$

où $\varepsilon_0 = 32mgl$. Ce résultat se différencie de l'estimation assez grossière, faite au problème précédent, de la valeur de la constante ε_0, c'est-à-dire d'un nombre indépendant de $E - 2mgl$.

---

elliptiques jacobiennes — le sinus elliptique: $\sin \xi = \operatorname{sn}(u, k)$. L'intégrale elliptique complète du premier ordre est la fonction $K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$. Mentionnons également les formules de deux cas limites:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right) \quad \text{pour} \quad k \ll 1,$$

$$K(k) = \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - k^2} \quad \text{pour} \quad 1 - k \ll 1.$$

Les tables et les formules relatives à ces fonctions peuvent être trouvées, par exemple, dans [10].

1.8. La loi de mouvement dans le champ $U(x) + \delta U(x)$ se définit par l'égalité

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \delta U(x)}} \tag{1}$$

($x = a$ pour $t = 0$). En développant l'expression sous l'intégrale dans (1) en puissance de $\delta U(x)$, il vient

$$t = t_0(x) + \delta t(x), \tag{2}$$

où

$$t_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \tag{3}$$

$$\delta t(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{\delta U(x)\, dx}{[E - U(x)]^{3/2}}. \tag{4}$$

Supposons que la loi du mouvement, en l'absence de l'adjonction $\delta U(x)$, déduite de l'équation $t = t_0(x)$, soit $x = x_0(t)$. On tire alors de (2)

$$x = x_0(t - \delta t(x)), \tag{5}$$

en outre, dans la petite adjonction $\delta t(x)$ on peut poser $x = x_0(t)$ et effectuer le développement de (5) en δt. On obtient en définitive

$$x = x_0(t) - x_0'(t)\, \delta t(x_0(t)). \tag{6}$$

Près du point d'arrêt $x = x_1$ le développement (2) ne peut plus être appliqué, car la correction $\delta t(x) \to \infty$ quand $x \to x_1$.

Il est toutefois remarquable que la formule (6) reste vraie jusqu'au point d'arrêt, même si

$$|\delta U'(x)| \ll |F|, \quad F = -U'(x_1). \tag{7}$$

Ceci est en rapport avec le fait qu'avec le rapprochement du point d'arrêt δt croît, la dépendance de $x(t)$ près de l'extrémum devenant faible.

Vraisemblablement au voisinage de x_1 le mouvement non perturbé prend la forme

$$x_0(t) = x_1 + \frac{F}{2m}(t - t_1)^2. \tag{8}$$

L'addition de δU déplace le point d'arrêt de δx_1, en accord avec l'équation $U(x_1 + \delta x_1) + \delta U(x_1 + \delta x_1) = E$. D'où $\delta x_1 = \frac{\delta U(x_1)}{F}$. Compte tenu de la perturbation δU, de façon analogue à (8), il vient

$$x(t) = x_1 + \delta x_1 + \frac{F}{2m}(t - t_1 - \delta t_1)^2 \tag{9}$$

(en vertu de (7) on néglige la correction à F). Vérifions que le calcul suivant la formule (6) aboutit à (9).

Divisons dans (4) le domaine d'intégration en deux parties: de a à b et de b à x, où b est situé près de x_1. Dans le second domaine on peut poser $\delta U = \delta U(x_1)$ et $U(x) = E - (x - x_1) F$. Alors

$$\delta t = \frac{\sqrt{m}\,\delta U(x_1)}{\sqrt{2F^3(x-x_1)}} + \delta t_0, \tag{10}$$

$$\delta t_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_b^a \frac{\delta U(x)\,dx}{(E-U)^{3/2}} - \frac{\sqrt{m}\,\delta U(x_1)}{\sqrt{F^3(b-x_1)}}$$

En reportant (10) et (8) dans (6) et en négligeant δt_0^2, on obtient (9) avec $\delta t_1 = \delta t_0$.

1.9. a) Profitons des résultats du problème précédent. Un mouvement non perturbé

$$x_0(t) = a \sin \omega t, \quad E = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2.$$

De plus $|\delta U/U| \lesssim \varepsilon = \frac{\alpha a}{\omega^2} \ll 1$. La correction

$$\delta t(x) = \frac{\alpha}{3\omega^3}\left(\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - 2a\right),$$

$$\delta t(x_0(t)) = \frac{\varepsilon}{3\omega}\left(\cos \omega t + \frac{1}{\cos \omega t} - 2\right)$$

et, conformément à la formule (6), du problème précédent

$$x(t) = a \sin \omega t - \frac{\varepsilon a}{3}(\cos^2 \omega t + 1 - 2\cos \omega t).$$

Avec la précision jusqu'aux termes du premier ordre en ε inclus près

$$x(t) = a \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\varepsilon\right) - \frac{\varepsilon}{2} a - \frac{\varepsilon}{6}\cos 2\omega t$$

(comp. avec problème 8.1b).

b) en agissant de la même façon qu'au point précédent, on obtient

$$x(t) = a \sin \omega t + a\varepsilon\left(\frac{3}{2}\omega t \cos \omega t - \frac{7}{8}\sin \omega t - \frac{1}{8}\sin 3\omega t\right), \quad \varepsilon = \frac{\beta a^2}{4\omega^2} \ll 1. \tag{1}$$

Ce résultat possède une précision relative $\sim\varepsilon^2$ durant une période, tandis qu'après ε^{-1} périodes la formule (1) devient complètement inapplicable. Compte tenu de la nature périodique du mouvement, on peut étendre le résultat (1) à un grand laps de temps. Avec la précision jusqu'aux termes de l'ordre de ε inclus près la formule (1)

se transforme en une forme explicitement périodique

$$x(t)=a\left(1-\frac{7}{8}\varepsilon\right)\sin\left[\omega\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon\right)t\right]-a\frac{\varepsilon}{8}\sin\left[3\omega\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon\right)t\right]. \tag{2}$$

Les corrections négligées dans (1) impliquent une variation de la pulsation de l'ordre de $\varepsilon^2\omega$, de sorte que (2) conserve une précision relative $\sim\varepsilon$ pendant ε^{-1} périodes (comp. avec problème 8.1a).

1.10. La variation de la période cherchée

$$\delta T=\sqrt{2m}\left[\int\limits_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)-\delta U(x)}}-\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}\right] \tag{1}$$

On ne peut pas développer en $\delta U(x)$ l'expression sous l'intégrale de (1): la condition d'application du théorème de dérivation de l'intégrale impropre par rapport au paramètre est violée, car l'intégrale obtenue par dérivation est divergente. L'expression sous l'intégrale ne peut être développée en $\delta U(x)$ jusqu'au terme linéaire inclus que si l'on donne à δT la forme

$$\delta T=2\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial E}\left[\int\limits_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2}\sqrt{E-U(x)-\delta U(x)}\,dx-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{E-U(x)}\,dx\right]. \tag{2}$$

D'où

$$\delta T=-\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\delta U(x)\,dx}{\sqrt{E-U(x)}}=-\frac{\partial}{\partial E}T\langle\delta U\rangle), \tag{3}$$

où

$$\langle\delta U\rangle=\frac{1}{T}\int\limits_0^T\delta U[x(t)]\,dt \tag{4}$$

est la valeur moyenne de δU sur le temps.

La durée de mouvement près des points d'arrêt constitue une petite contribution à la période (évidemment si $U'(x_{1,2})\neq 0$); à cette occasion voir problème 1.3. C'est justement pourquoi la formule (3) donne une approximation satisfaisante.

Dans certains cas même un petit complément $\delta U(x)$ peut modifier sensiblement la nature du mouvement de la particule (voir, par exemple, problème 1.11b, c).

En agissant de façon analogue, on peut obtenir les termes suivants du développement de δT en δU:

$$T = \sqrt{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_{x_1}^{x_2} \frac{[\delta U(x)]^n \, dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \tag{5}$$

L'expression formelle (5) peut devenir une série asymptotique et même une série convergente.

1.11. a) La correction à la période $2\pi/\omega$, obtenue avec la formule (5) du problème précédent, est égale à $-3\pi\beta E/2m\omega^5$, étant petite pour des E suffisamment petits.

b) La figure 74 fournit les graphiques de l'énergie potentielle $U(x)$ et $U(x) + \delta U(x)$. On y voit que pour $E > U_m = m\omega^6/6\alpha^2$ l'addition du complément rend le mouvement infini. Pour des valeurs de E voisines de U_m, la période d'oscillations s'accroît sans cesse (comme $|\ln(U_m - E)|$; voir problème 1.4); aussi ne peut-on pas compter qu'elle se déterminera par un petit nombre de termes de la série (5) du problème 1.10. Si, par contre, $E \ll U_m$, la correction à la période $\delta T = 5\pi E/18\omega U_m$.

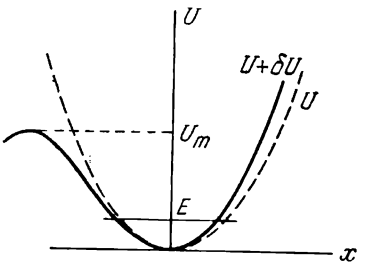


Fig. 74

c) $\delta T = \dfrac{3\pi AV\sqrt{m}}{2\alpha\,|E|^{5/2}\sqrt{2}}$; la formule est applicable si $|E| \gg |U_m| \approx \sqrt{8AV}$ $(E < 0)$.

1.12.

$$\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0}\right) dx = \frac{1}{\alpha v_0} \ln \frac{E}{E - U_0},$$

où $v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$, $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ (comp. avec solution du problème 1.1b).

§ 2. Mouvement de particules dans des champs

2.1. Pour l'étude du mouvement de la particule on utilisera les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique:

$$\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(r) = E, \tag{1}$$

$$m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{M}. \tag{2}$$

Selon (2) la trajectoire est une courbe plane. En introduisant dans ce plan les coordonnées polaires (fig. 75), il vient

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2}+U(r)=E, \tag{3}$$

$$mr^2\dot{\varphi}=M. \tag{4}$$

En éliminant de (3) $\dot{\varphi}$ à l'aide de (4), on obtient

$$\frac{m\dot{r}^2}{2}+U_{\text{eff}}(r)=E, \tag{5}$$

où

$$U_{\text{eff}}(r)=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}.$$

Le mouvement radial peut donc être considéré comme un mouvement unidimensionnel dans le champ $U_{\text{eff}}(r)$.

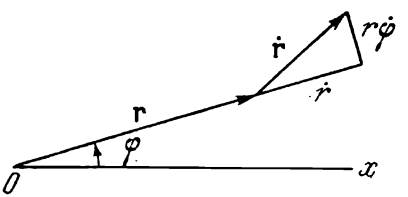


Fig. 75

Pour une étude qualitative de la nature du mouvement, utilisons les graphiques:

$$U_{\text{eff}}(r)=-\frac{\alpha}{r}-\frac{\gamma}{r^3}+\frac{M^2}{2mr^2} \tag{6}$$

avec des valeurs différentes de M (fig. 76).

Si $12\alpha\gamma m^2<M^4$, U_{eff} possède deux extrémums $\left(\text{pour } r_{1,2}=\frac{M^2\pm\sqrt{M^4-12\alpha\gamma m^2}}{2m\alpha}\right)$. La valeur maximale de $U_{\text{eff}}(r_1)=U_{\max}$ est positive pour $M^4>16\alpha\gamma m^2$ (fig. 76,*a*) et négative pour $12\alpha\gamma m^2<M^4<16\alpha\gamma m^2$ (fig. 76, *b*); dans les deux cas $U_{\text{eff}}(r_2)=U_{\min}<0$.

Si, néanmoins, $M^4<12\alpha\gamma m^2$, la fonction $U_{\text{eff}}(r)$ devient monotone (fig. 76, *c*).

Examinons en détail le cas a). Si $E>U_{\max}$, la particule lancée de l'infini vient frapper le centre du champ. La grandeur $\dot{\varphi}$, d'après

4), croît alors. Ces considérations sont suffisantes pour une représentation grossière de la trajectoire de la particule (fig. 77, *a*).

A des grandes distances, pour lesquelles $\frac{\gamma}{r^3} \ll \frac{\alpha}{r}$, le rôle principal dans $U(r)$ revient au terme $-\frac{\alpha}{r}$ et la trajectoire diffère peu de l'hyperbole. (Pour l'aspect de la trajectoire quand $r \to 0$ voir problème 2.8.)

Si l'énergie E est voisine de $U_{\max}$, l'intervalle des valeurs de r proches de r_1 est franchi très lentement par la particule. La rotation

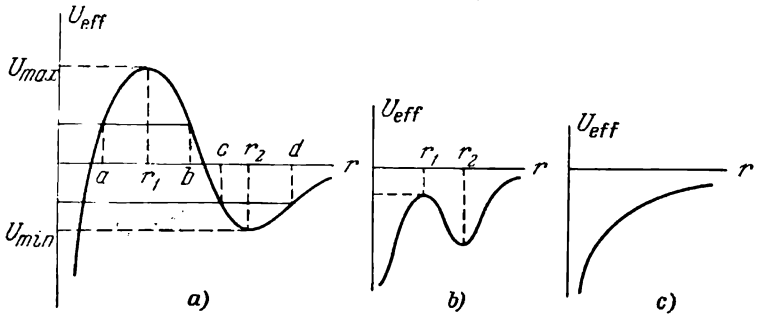


Fig. 76

du rayon vecteur continue toujours à la vitesse $\dot{\varphi} \approx \frac{M}{mr_1^2}$, de sorte que la particule est en mesure d'accomplir un grand nombre de révolutions autour du centre avant de parcourir tout l'intervalle

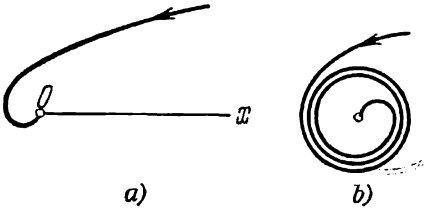


Fig. 77

(fig. 77, *b*). Si $E = U_{\max}$, la particule, dans son mouvement radial, se rapproche asymptotiquement de l'infini vers le point $r = r_1$ (comp. avec problème 1.3). La trajectoire est une spirale se rapprochant du cercle de rayon r_1 et de centre O (fig. 78, courbe *a*). Si la particule s'éloigne avec cette énergie du centre dans le domaine $r < r_1$, sa trajectoire se rapproche également de ce cercle mais de l'intérieur (fig. 78, courbe *b*). Enfin pour $E = U_{\max}$ le mouvement sur le cercle devient possible $r = r_1$.

Toute variation des grandeurs E ou M fait passer la particule sur une trajectoire qui s'éloigne de ce cercle, autrement dit le mouvement avec $r = r_1$ est instable.

Si $0 < E < U_{max}$, la particule lancée de l'infini se réfléchit sur la barrière de potentiel $U_{eff}(r)$ et s'éloigne de nouveau à l'infini. L'aspect approché de la trajectoire nous est fourni dans ce cas par la

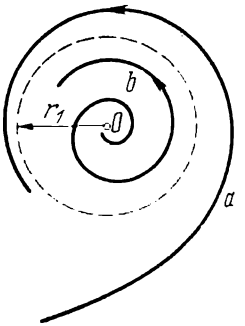


Fig. 78

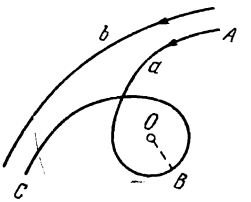


Fig. 79

figure 79 (courbes a et b). Si l'énergie est proche de U_{max}, la particule accomplira un grand nombre de révolutions autour du centre avant que la vitesse radiale $\dot{r}$ change de signe. Plus l'énergie est proche de zéro (pour un M fixé cela correspond à l'augmentation du

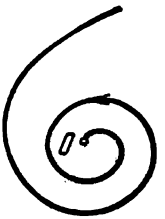


Fig. 80

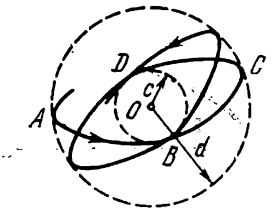


Fig. 81

paramètre d'impact), moins la trajectoire de la particule est déformée. Pour $E < U_{max}$ la particule peut même chuter au centre du champ au cas où elle se meut dans le domaine $r < a$. La figure 80 nous fournit dans ce cas la forme de la trajectoire.

Pour $U_{min} < E < 0$, la particule peut également accomplir des oscillations radiales dans le domaine $c \leqslant r \leqslant d$ (fig. 81). Si l'énergie est proche de zéro, l'amplitude des oscillations radiales est grande, la période pouvant également devenir importante. Pour une énergie proche de U_{min} la trajectoire se rapproche de celle d'un

cercle de rayon r_2, l'angle de rotation de rayon vecteur durant la période de l'oscillation radiale dépendant des grandeurs α, γ, M (comp. avec problème 5.4). Pour $E = U_{\min}$, la particule se déplace sur le cercle mentionné.

De façon analogue il est possible d'étudier le mouvement de la particule dans les autres cas.

Quelles sont les particularités de la trajectoire au cas où $M^4 = 12\alpha\gamma m^2$?

La loi du mouvement et l'équation de la trajectoire peuvent être obtenues en recourant aux équations (4), (5). De (5) on tire

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{eff}}(r)]}, \tag{7}$$

d'où

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} + C. \tag{8}$$

Eliminant dt de (7) à l'aide de (4), on obtient l'équation de la trajectoire

$$\varphi = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} + C'. \tag{9}$$

Examinons le cas de $M^4 > 12\alpha\gamma m^2$. Si la particule se dirige vers le centre, il faut dans (7) (et, par suite, dans (8)) choisir le signe « moins ». Posons $r = r_0$ pour $t = 0$, on peut alors récrire (8) sous la forme

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}. \tag{10}$$

L'égalité (10) définit sous forme implicite la dépendance de r du temps. Si la trajectoire passe par le point $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, l'équation de la trajectoire (compte tenu du signe choisi) prend la forme

$$\varphi = -M \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \, | p_r |} + \varphi_0, \tag{11}$$

où

$$| p_r | = \sqrt{2m[E - U_{\text{eff}}(r)]}.$$

En particulier pour une particule dont la vitesse engendre à l'infini avec l'axe x l'angle ψ, il faut poser $r_0 = \infty$, $\varphi_0 = \pi - \psi$.

Si, par contre, $0 < E < U_{\max}$, ces équations ne correspondent qu'au tronçon AB de la trajectoire (fig. 79, courbe a). Au point B la composante radiale de la vitesse $\dot{r}$ s'annule, puis change de signe Aussi le tronçon BC de la trajectoire est-il décrit par l'équation (9) avec le signe « plus », mais la constante doit être redéfinie. Il est

commode de transcrire (9) sous la forme

$$\varphi = M \int_{r_{\min}}^{r} \frac{dr}{r^2 \mid p_r \mid} + C'. \tag{12}$$

La borne inférieure de l'intégrale pourrait être choisie arbitrairement tant que la constante C' n'est pas définie. Selon (12) on a

$$C' = \varphi\,(r_{\min}). \tag{13}$$

En tirant $\varphi\,(r_{\min})$ de (11), on obtient l'équation du tronçon de trajectoire BC :

$$\varphi = \left(\int_{r_{\min}}^{r} - \int_{r_0}^{r_{\min}} \right) \frac{M\,dr}{r^2 \mid p_r \mid} + \varphi_0. \tag{14}$$

De façon analogue on détermine la loi du mouvement sur le tronçon BC

$$t = \left(\int_{r_{\min}}^{r} - \int_{r_0}^{r_{\min}} \right) \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}\,(r)}}. \tag{15}$$

Si $U_{\min} < E < 0$, $a < r_0 < b$, $\dot{r}\,(0) < 0$, $\varphi\,|_{t=0} = \varphi_0$, l'équation (11) décrit alors le tronçon AB de la trajectoire (fig. 81). Le tronçon BC est décrit par l'équation

$$\varphi = M \int_{a}^{r} \frac{dr}{r^2 \mid p_r \mid} + \varphi_1, \tag{16}$$

où l'angle φ_1 peut être obtenu en posant dans (11) $r = a$. L'équation du tronçon CD est

$$\varphi = -M \int_{b}^{r} \frac{dr}{r^2 \mid p_r \mid} + \varphi_2, \tag{17}$$

où φ_2 se détermine à partir de (16) avec $r = b$, etc. En portant dans (16) et (17) les valeurs de φ_1 et φ_2, transcrivons les équations des tronçons de trajectoire sous la forme

$$\varphi = M \left(\int_{a}^{r} - \int_{r_0}^{a} \right) \frac{dr}{r^2 \mid p_r \mid} + \varphi_0, \tag{18}$$

$$\varphi = M \left(\int_{b}^{r} + \int_{a}^{b} - \int_{r_0}^{a} \right) \frac{dr}{r^2 \mid p_r \mid} + \varphi_0 =$$

$$= M \left(-\int_{a}^{r} + 2 \int_{a}^{b} - \int_{r_0}^{a} \right) \frac{dr}{r^2 \mid p_r \mid} + \varphi_0. \tag{19}$$

Il est aisé de se convaincre que l'équation répondant au tronçon de trajectoire associé à la n-ième oscillation radiale (le tronçon AB étant considéré comme le premier) prend la forme *)

$$\varphi = M\left(\pm\int_a^r + 2(n-1)\int_a^b - \int_{r_0}^a\right)\frac{dr}{r^2\,|\,p_r\,|} + \varphi_0. \qquad (20)$$

Dans les formules mentionnées il est admis que l'angle φ varie constamment, la limitation $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ n'étant pas introduite.

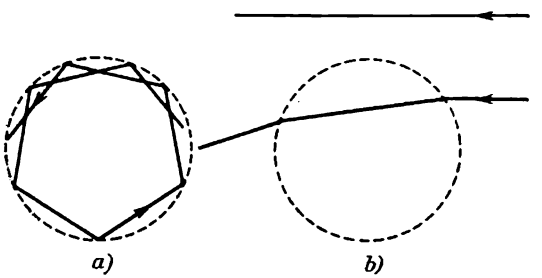


Fig. 82

A une valeur donnée de r correspond une infinité de valeurs de φ (répondant aux différents n et aux signes opposés dans la formule (20)) ; φ est une fonction multivoque de r. Par contre, la dépendance de r (φ) est univoque.

On peut exprimer de façon analogue les lois du mouvement et les équations de la trajectoire pour d'autres cas.

2.2. En dehors de la sphère de rayon R la particule se déplace à la vitesse $\sqrt{2E/m}$, tandis qu'à l'intérieur de cette sphère, à la vitesse $\sqrt{2(E+V)/m}$. En fonction de la relation liant E et M on obtient des trajectoires de formes différentes.

Pour $\frac{M^2}{2mR^2} - V < E < \frac{M^2}{2mR^2}$, la particule se meut soit à l'intérieur de la sphère, en subissant des réflexions sur sa frontière (fig. 82, *a*), soit (si en outre $E > 0$) peut se déplacer en dehors de la

*) L'équation de la trajectoire (20) peut être transcrite sous la forme

$$\cos\gamma(\varphi+\alpha) = \left(\gamma M\int_a^r \frac{dr}{r^2\,|\,p_r\,|}\right),$$

où

$$\pi\gamma^{-1} = M\int_a^b \frac{dr}{r^2\,|\,p_r\,|}, \qquad \alpha = M\int_{r_0}^a \frac{dr}{r^2\,|\,p_r\,|} - \varphi_0.$$

sphère (trajectoire en ligne droite, fig. 82, *b*). Pour $\frac{M^2}{2mR^2} < E$, la trajectoire est réfractée (fig. 82, *b*).

Quel aspect prendra la trajectoire pour $E = \frac{M^2}{2mR^2} - V$?

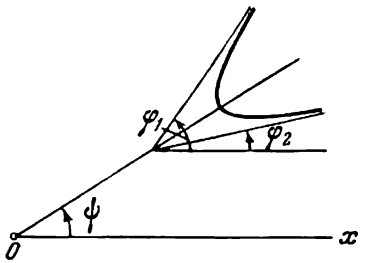


Fig. 83

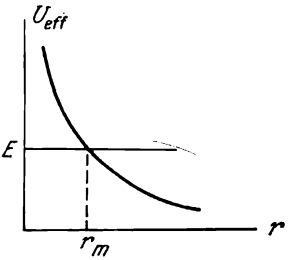


Fig. 84

2.3. Pour établir l'équation de la trajectoire, utilisons les formules

$$\varphi = \int \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}})}}, \quad U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{1}$$

Après des calculs *), on obtient

$$r = \frac{p}{e\cos\gamma(\varphi - \psi) - 1} \tag{2}$$

où

$$p = \frac{2}{\alpha}\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right), \quad e = \sqrt{1 + \frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}, \tag{3}$$

$\gamma = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}$, $E > 0$, ψ étant une constante arbitraire.

La trajectoire est une courbe déduite de l'hyperbole en diminuant les angles polaires γ fois (fig. 83). La constante ψ définit l'orientation de la trajectoire.

La direction des asymptotes est déterminée par la condition $r \to \infty$ ou $e\cos(\varphi_{1,2} - \psi) = 1$. La vitesse est déviée de l'angle

$$\pi - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pi - \frac{2}{\gamma}\arccos\frac{1}{e} = \pi - \frac{2}{\gamma}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}$$

2.4. Il est avant tout utile d'étudier la nature du mouvement à l'aide du graphique $U_{\text{eff}}(r)$. La figure 84 nous fournit ce graphique

*) L'intégrale transcrite sous la forme

$$\frac{\tilde{M}}{M}\varphi = \int \frac{\tilde{M}\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - \tilde{M}^2/2mr^2 - \alpha/r)}},$$

où $\tilde{M}^2 = M^2 + 2m\beta$, se réduit à l'intégrale correspondante du problème de Kepler (voir [1], § 15).

pour le cas où $\beta < M^2/2m$. Dans ce cas seul est possible un mouvement infini dans le domaine $r \geqslant r_m$, avec $E > 0$. L'équation de la trajectoire est la même que dans le problème 2.3 (équation (2)), par contre, dans les égalités (3) il faut substituer $-\beta$ à β. La principale différence de la trajectoire trouvée du problème 2.3 est due au fait

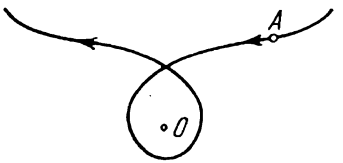


Fig. 85

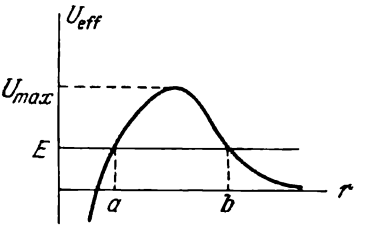


Fig. 86

que $\gamma < 1$. La figure 85 en fournit la forme approchée. (Le point d'inflexion A est déterminé par la condition $dU/dr = 0$, c'est-à-dire $r = 2\beta/\alpha$.)

Pour le cas où $\beta > M^2/2m$ le graphique $U_{\text{eff}}(r)$ est représenté sur la figure 86.

Si $E > U_{\max} = \frac{\alpha^2}{4(\beta - M^2/2m)}$, la particule lancée de l'infini chute au centre du champ. L'équation de la trajectoire peut être obtenue dans ce cas à partir de l'équation du problème 2.3. A cette fin en plus de la substitution de $-\beta$ à β, il faut remplacer ψ par $\psi + \pi/2\gamma$ et, ensuite, se servir des formules

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \sqrt{-x} = i\sqrt{x}.$$

Il vient alors

$$r = \frac{p'}{e' \operatorname{sh} \gamma' (\varphi - \psi) + 1} \tag{1}$$

$$p' = \frac{2}{\alpha}\left(\beta - \frac{M^2}{2m}\right), \quad e' = \sqrt{\frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta - \frac{M^2}{2m}\right) - 1}.$$

$$\gamma' = \sqrt{\frac{2m\beta}{M^2} - 1}. \tag{2}$$

Pour ce cas la trajectoire est représentée sur la figure 87, *a*. Notons que pour $r \to 0$, il s'avère que $\varphi \to \infty$. Cela signifie que la particule, en chutant au centre du champ, accomplit autour de ce dernier un nombre infini de révolutions.

Si $E < U_{\max}$, selon la figure 86, le mouvement est possible soit dans la région $b \leqslant r < \infty$ (diffusion), soit dans la région $0 < r \leqslant a$ (chute au centre). L'équation de la trajectoire s'obtient en recourant

à l'égalité $\cos ix = \operatorname{ch} x$ (dans le second cas, en faisant aussi la substitution de ψ par $\psi + \pi/\gamma$):

$$r = \frac{p'}{1 \mp e'' \operatorname{ch} \gamma' (\varphi - \psi)}, \quad e'' = \sqrt{1 - \frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta - \frac{M^2}{2m}\right)}. \qquad (3)$$

Au cas où $E = U_{\max}$ on ne peut se rapporter à la formule (2) du problème 2.3 (car dans sa déduction on a admis que $e \neq 0$) et il faut recourir de nouveau à l'intégrale (1). Il vient

$$r = \frac{p'}{1 + c \exp(-\gamma' \varphi)},$$

soit

$$r = \frac{p'}{1 \pm \exp[-\gamma'(\varphi - \psi)]} \quad \text{ou} \quad r = p'$$

suivant la valeur initiale de r. La trajectoire est soit une spirale débutant à l'infini ou près du centre et se rapprochant asymptotiquement du cercle de rayon $r = p'$, soit ce cercle même (fig. 87, *b*).

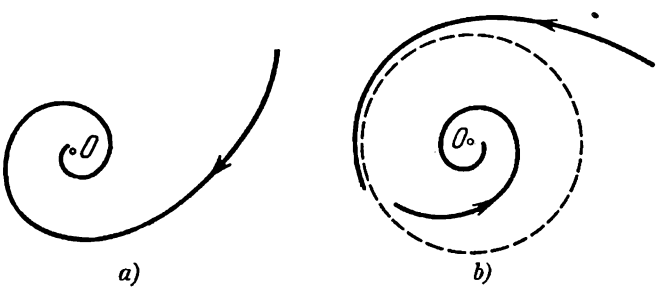


Fig. 87

Enfin dans le cas où $\beta = M^2/2m$ il est également plus simple de recourir de nouveau à l'intégrale. Il y a diffusion dans ce cas, tandis que la trajectoire a pour équation

$$r = \frac{\alpha/E}{1 - m\alpha^2 (\varphi - \psi)^2 / 2M^2 E}.$$

La durée de chute de la particule au centre du champ s'obtient à l'aide de la formule

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}}}$$

Pour le cas, par exemple, où la trajectoire est de la forme (2) la durée de chute de la distance r est

$$t=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\sqrt{Er^2-\alpha r-\beta-M^2/2m}-\sqrt{\beta-M^2/2m}\right)+$$
$$+\frac{\alpha}{2E}\sqrt{\frac{m}{2E}}\left(\arcsin\frac{2Er/\alpha-1}{e'}-\arcsin\frac{1}{e'}\right).$$

2.5. L'équation de la trajectoire

$$r=\frac{p}{1+e\cos\gamma(\varphi-\psi)}$$

(p, e, γ sont définis dans le problème 2.3). Pour $E<0$ le mouvement est fini *)

$$T_r=\frac{\pi\alpha\sqrt{m}}{(2\,|E\,|)^{3/2}},\quad \Delta\varphi=\frac{2\pi}{\gamma},\quad T_\varphi=\gamma T_r.$$

La trajectoire est fermée si γ est un nombre rationnel. La figure 88 fournit la représentation de la trajectoire pour $\gamma\approx 5$.

2.6. Pour $\beta<M^2/2m$

$$r=\frac{\tilde{p}}{1-\tilde{e}\cos\tilde{\gamma}(\varphi-\psi)},\quad \tilde{p}=\frac{2}{\alpha}\left(\frac{M^2}{2m}-\beta\right),$$
$$\tilde{\gamma}=\sqrt{1-\frac{2m\beta}{M^2}},\quad \tilde{e}=\sqrt{1+\frac{4E}{\alpha^2}\left(\frac{M^2}{2m}-\beta\right)};$$

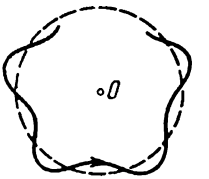


Fig. 88

si $E<0$, $\Delta\varphi=2\pi/\tilde{\gamma}$, $T_\varphi=\tilde{\gamma}T_r$ (T_r a le même sens que dans le problème 2.5).

Au cas où $\beta>M^2/2m$ (dans les notations du problème 2.4)

$$r=\frac{p'}{e'\,\mathrm{sh}\,\gamma'(\varphi-\psi)-1}\quad \text{si}\quad E>U_{\max},$$
$$r=\frac{p'}{e''\,\mathrm{ch}\,\gamma'(\varphi-\psi)-1}\quad \text{si}\quad E<U_{\max}.$$

2.7. a) Le mouvement fini est possible si la fonction $U_{\text{eff}}(r)$ a un minimum. L'équation $U'_{\text{eff}}(r)=0$ est réduite à la forme $f(x)=M^2\varkappa/\alpha m$, où $f(x)=x(x+1)e^{-x}$, $x=\varkappa r$. A l'aide du graphique $f(x)$ on voit aussitôt que l'équation ne présente des racines qu'à la condition que $\varkappa M^2/\alpha m$ soit inférieur à la valeur maximale $f(x)$ (pour $x>0$).

Cette dernière valeur est $(2+\sqrt{5})\exp\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\approx 0{,}84$. Donc le mouvement fini est possible si $M^2<0{,}84\alpha m/\varkappa$.

*) La période est la même que pour le champ $U_0=-\alpha/r$. Pour déterminer T_r, il suffit de remarquer que l'adjonction au champ U_0 de l'apport β/r^2 se répercute sur le mouvement radial de la même façon que l'accroissement M. Quant à la période T_r, elle ne dépend pas de M dans le champ U_0.

b) Le mouvement fini est possible au cas où $M^2 < 8mV/e^2\varkappa^2$.

2.8. Dans l'équation de la trajectoire (voir formule (1) du problème 2.3) on peut, si r est petit, négliger la grandeur E (pour $n = 2$) et pour $n > 2$, on peut aussi laisser tomber le terme $M^2/2mr^2$. Il vient alors (fig. 89)

$$\varphi = -\frac{M \ln (r/r_0)}{\sqrt{2m\alpha - M^2}} + \varphi_0, \quad \text{pour} \quad n = 2,$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{2m}\, r^{-1+n/2}}{\sqrt{2m\alpha\,(n-2)}} + C \quad \text{pour} \quad n > 2.$$

Le nombre de révolutions s'avère infini seulement pour $n = 2$.

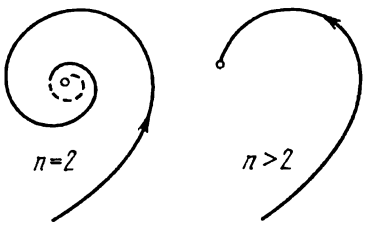


Fig. 89

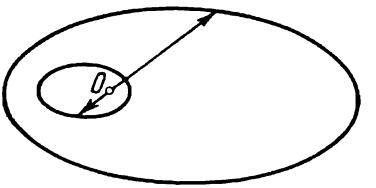


Fig. 90

La durée de chute au centre est finie, vu que la vitesse radiale s'accroît avec le rapprochement du centre.

2.9. Le nombre de révolutions autour du centre n'est infini qu'au cas b) pour $E = 0$, $n = 2$.

2.10. La durée de chute est $\pi\sqrt{mR^3/8\alpha}$.

2.11. Un mouvement relatif se caractérise par le moment $M = mv\rho$ et par l'énergie $E = \frac{mv^2}{2}$, où $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse réduite. La distance cherchée se définit par la condition $U_{\text{eff}}(r_{\min}) = E$. Une réponse simple s'obtient pour $n = 1, 2, 4$.

2.12. Les trajectoires des particules sont:

$$\frac{m}{m_{1,2}} \frac{p}{r_{1,2}} = 1 \pm e \cos \varphi$$

avec

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}};$$

E et M sont l'énergie et le moment totaux du système. Les particules se déplacent sur des sections coniques semblables à commun, les rayons vecteurs étant dirigés à tout moment dans des sens opposés (fig. 90).

2.13. Comme il s'ensuit immédiatement de la figure 91,

$$OS = \rho\,(\operatorname{ctg}\varphi_0 - \operatorname{ctg} 2\varphi_0).$$

Alors

$$\varphi_0 = \rho \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1-U(r)/E-\rho^2/r^2}}.$$

Pour $\rho \to 0$

$$\varphi_0 = \rho \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1-U/E}} - 2\rho^3 E^{3/2}\frac{\partial}{\partial E}\int\limits_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^4\sqrt{E-U}} + \ldots$$

(comp. avec problème 2.23), de sorte que

$$OS = \left(\rho \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{1-U/E}}\right)^{-1} + O(\rho^2)\ldots$$

Le point S est le foyer imaginaire du faisceau de particules diffusées vu qu'à la précision jusqu'au premier ordre en ρ inclus près

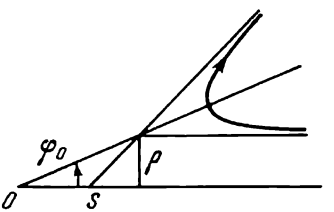


Fig. 91

la position du point d'intersection de l'asymptote à la trajectoire avec l'axe du faisceau est indépendante de ρ.

2.14. L'équation de la trajectoire est

$$\frac{p}{r} = e\cos(\varphi-\varphi_0) - 1,$$

où $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ $e = \sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, quant à φ_0, elle s'obtient en partant de la condition $\varphi \to 0$ pour $r \to \infty$: $\cos\varphi_0 = 1/e$. La région inaccessible aux particules est limitée par l'enveloppe de la famille des trajectoires.

Pour la déterminer, dérivons l'équation de la trajectoire

$$\frac{M^2}{m\alpha r} + 1 - \cos\varphi - \frac{M}{\alpha}\sqrt{\frac{2E}{m}}\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

par rapport au paramètre M :

$$\frac{2M}{mr} - \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \varphi = 0, \qquad (2)$$

et éliminons M de (1) et (2):

$$2\alpha/Er = 1 + \cos \varphi.$$

Bref, la région inaccessible aux particules $r < \frac{2\alpha}{E(1+\cos\varphi)}$ est limitée par un paraboloïde de révolution (fig. 92).

2.15. $\rho < \frac{2a\delta}{1-\delta^2-(1-\delta)^2\cos\varphi}$, où $\delta = \frac{mav^2}{2\alpha}$, $OA = a$.

2.16. Multiplions scalairement l'égalité

$$[\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} = \mathbf{A}$$

par $\mathbf{r}$. Notons par φ l'angle entre $\mathbf{r}$ et $\mathbf{A}$, il vient

$$\frac{M^2}{m} - \alpha r = Ar \cos \varphi$$

ou $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$, où $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \frac{|\mathbf{A}|}{\alpha}$.

Remarquons que le vecteur $\mathbf{A}$ est dirigé du centre du champ vers le point $r = r_{\min}$.

2.17. $\delta T = -\frac{\partial \delta I}{\partial E}$, où

$$\delta I = T\langle \delta U \rangle = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\delta U(r)\,dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}$$

(comp. avec problème 1.10). On peut de façon analogue représenter la variation de la distance angulaire entre des passages successifs des points $r = r_{\min}$ sous la forme $\delta\Delta\varphi = \frac{\partial \delta I}{\partial M}$ (comp. [1], § 15, problème 3; § 49).

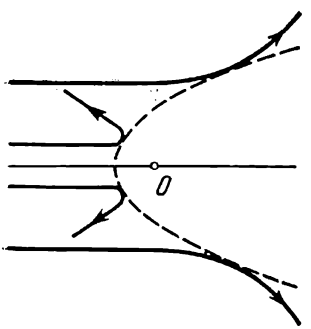


Fig. 92

2.18. Dans la région $r \ll D$ le champ $U(r)$ diffère peu du champ coulombien $U_0(r) = -\alpha/r$. Aussi la trajectoire du mouvement fini est-elle proche de l'ellipse, dont le paramètre p et l'excentricité e, se définissant par les constantes E et M, se conservent, quant à l'orientation elle se modifie. La vitesse de rotation Ω de l'ellipse se détermine par le déplacement du périhélie durant la période $\Omega = \delta\Delta\varphi/T_0$, où $\delta\Delta\varphi$ se calcule d'après la formule du problème précédent avec $\delta U = \frac{\alpha}{D} - \frac{\alpha r}{2D^2}$, T_0 étant la période dans le champ coulombien *). Après des calculs

*) Il est commode de passer à l'intégration par rapport à ξ, de plus (voir [1], § 15), $r = \frac{\alpha}{2|E|}(1 - e\cos\xi)$.

on obtient $\Omega = M/2mD^2$. L'équation de la trajectoire peut être transcrite sous la forme

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\gamma\varphi, \quad \gamma = 1 - \frac{\Omega T_0}{2\pi}. \tag{1}$$

L'écartement de la courbe (1) de la trajectoire vraie est du premier degré de petitesse en δU, c'est-à-dire qu'au cours d'une période l'équation (1) décrit la trajectoire avec la précision identique à l'équation d'une ellipse immobile. Toutefois l'équation (1) conserve la même précision pendant plusieurs périodes. On peut donc considérer cette équation comme une « approximation zéro correcte ».

Autrement dit, dans l'équation (1) on ne tient compte que des effets accumulés de premier ordre.

2.19. Le champ $U(r) = -\alpha/r^{1+\varepsilon}$ diffère peu du champ coulombien, l'orbite de la particule dans ce champ est donc une ellipse en lente précession. En développant $U(r)$ en ε, on lui donne la forme

$$U(r) = U_0(r) + \delta U, \quad \text{où} \quad U_0(r) = -\frac{\tilde{\alpha}}{r}, \quad \delta U = \frac{\varepsilon\tilde{\alpha}}{r}\ln\frac{r}{R},$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha R^{-\varepsilon},$$

R étant une constante égale à la dimension caractéristique de l'orbite.

Le déplacement du périhélie durant la période $\delta\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_0^T \delta U\, dt$ (voir problème 2.17) est calculé en effectuant la substitution

$$r = -\frac{\tilde{\alpha}}{2E}(1 - e\cos\xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi), \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\tilde{\alpha}^2}},$$

$T = \pi\tilde{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$ (voir [1], § 15). Il vient

$$\Omega = \frac{\delta\Delta\varphi}{T} = \frac{\varepsilon\tilde{\alpha}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial M}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\tilde{\alpha}(1 - e\cos\xi)}{2|E|R}\,d\xi =$$

$$= -\frac{\varepsilon|E|}{\pi}\frac{\partial e}{\partial M}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\xi\, d\xi}{1 - e\cos\xi} = \frac{2\pi}{T}\,\frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e^2}\,\varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$ la direction de la précession de l'orbite coïncide avec celle du mouvement de la particule sur l'orbite, tandis que pour $\varepsilon < 0$ elle lui est contraire.

2.20. $\Omega = -\frac{3}{2}\frac{\beta}{m\omega}\frac{a^2 + b^2}{a^4 b^4}\frac{M}{|M|}$.

2.21. Soient r_1 et r_2 les distances de la Terre et de la Lune du Soleil, tandis que jusqu'à leurs centres des masses elles sont respectivement a_1 et a_2 (fig. 93). L'énergie potentielle est

$$U = -\frac{\gamma m_0 m_1}{r_1} - \frac{\gamma m_0 m_2}{r_2},$$

où γ est la constante de gravitation, m_0, m_1, m_2 les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune, de plus $m_1 a_1 = m_2 a_2$. En reportant $r_{1,2} = \sqrt{r^2 + a_{1,2}^2 \mp 2ra_{1,2}\cos\psi}$ (ψ étant l'angle entre les directions du centre des masses vers le Soleil et la Terre) et en développant suivant les petits paramètres $\frac{a_{1,2}}{r}$, on obtient

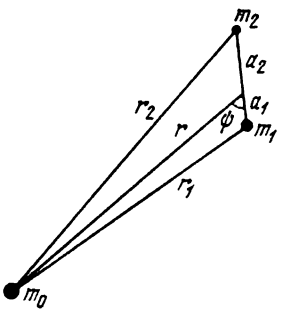


Fig. 93

$$U(r, \psi) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^3}(3\cos^2\psi - 1),$$

où $\alpha = \gamma m_0 (m_1 + m_2) \approx \gamma m_0 m_1$, $\beta = \frac{1}{4}\gamma m_0 (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \approx \frac{1}{4}\gamma m_0 m_2 a^2$.

Avec la prise de la moyenne sur un mois, $\cos^2\psi$ est remplacé par $1/2$, le potentiel acquérant la forme indiquée dans les conditions du problème.

Le déplacement du périhélie durant un an (voir [1], problème 3, § 15) est

$$\delta\varphi = \frac{6\pi\beta}{\alpha r^2} = \frac{3\pi}{2}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{a}{r}\right)^2.$$

Le deplacement du périhélie durant un siècle est

$$100\delta\varphi = 7{,}7''.$$

Il faut remarquer que le décalage total du périhélie de la Terre en cent ans 1158″ est essentiellement dû à l'influence de Jupiter et de Vénus.

Il est intéressant que l'appréciation de la correction relativiste fournit la grandeur $\sim 100 \cdot 2\pi \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1''$, $v \approx 30$ km/s (voir [2], § 39 et § 101).

2.22. De façon analogue au problème 2.18 on a

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial M}\langle\delta U\rangle = \frac{a}{2}\frac{\partial e^2}{\partial M}\left[\delta U'(a) + \frac{a}{2}\delta U''(a)\right] =$$

$$= -\sqrt{\frac{a}{m\alpha}}\left[\delta U'(a) + \frac{a}{2}\delta U''(a)\right]\frac{M}{|M|}.$$

La prise en compte des termes suivants du développement δU en $(r - a)$ introduit dans Ω la contribution $\lesssim e^2\Omega$.

2.23. Le déplacement du périhélie durant une période peut se représenter sous la forme

$$\Delta\varphi = -\frac{4}{3}\sqrt{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial M\,\partial E}\int\limits_{r_1+\delta r_1}^{r_2+\delta r_2}(E-U_{\text{eff}}-\delta U)^{3/2}\,dr.$$

A la précision jusqu'au second ordre en δU près, il vient

$$\Delta\varphi = 2\pi + \delta_1\varphi + \delta_2\varphi,$$

$$\delta_1\varphi = T\,\frac{\partial}{\partial M}\langle\delta U\rangle,$$

$$\delta_2\varphi = -\frac{\partial^2}{2\partial M\,\partial E}\left[T\,\langle(\delta U)^2\rangle\right],$$

où $\langle f\rangle$ est la valeur moyenne de la fonction $f(r)$ durant la période T du mouvement non perturbé (comp. avec problème 2.17). La vitesse de la précession

$$\Omega = \frac{\delta_1\varphi+\delta_2\varphi}{T+\delta T} = \frac{\delta_1\varphi}{T} + \frac{\delta_2\varphi}{T} - \frac{\delta_1\varphi\,\delta T}{T^2},$$

$$\delta T = -\frac{\partial}{\partial E}\left(T\,\langle\delta U\rangle\right).$$

2.24. Soit l'équation de la trajectoire

$$\varphi = \int\frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(E-\dfrac{M^2}{2mr^2}+\dfrac{\alpha}{r}-\dfrac{\gamma}{r^3}\right)}}, \tag{1}$$

en développant l'expression sous l'intégrale en $\delta U = \gamma/r^3$ sous la forme

$$\varphi = \varphi_0(r) + \delta\varphi(r), \tag{2}$$

où

$$\varphi_0(r) = \int\frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(E-\dfrac{M^2}{2mr^2}+\dfrac{\alpha}{r}\right)}}, \tag{3}$$

$$\delta\varphi(r) = \int\frac{\gamma M\,dr}{r^5\sqrt{2m\left(E-\dfrac{M^2}{2mr^2}+\dfrac{\alpha}{r}\right)^3}}. \tag{4}$$

En négligeant dans (2) la correction $\delta\varphi(r)$, on obtient évidemment l'équation de la trajectoire dans le champ coulombien (voir [1], § 15)

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi, \tag{5}$$

où $p=\frac{M^2}{m\alpha}$, $e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$. Mais si l'on tient compte de la correction $\delta\varphi(r)$ dans (2), on obtient au lieu de (5)

$$\frac{p}{r}=1+e\cos(\varphi-\delta\varphi(r)). \tag{6}$$

Dans le second membre de (6) on peut développer en $\delta\varphi(r)$ ainsi que reporter dans $\delta\varphi(r)$ la dépendance $r=r_0(\varphi)$ définie d'après (5),

$$\frac{p}{r}=1+e\cos\varphi+e\delta\varphi(r_0(\varphi))\sin\varphi. \tag{7}$$

En calculant l'intégrale *) (4), on obtient

$$\delta\varphi(r_0(\varphi))=\frac{m^2\alpha\gamma}{M^4}\left\{-3\varphi-\frac{2e^2+1}{e}\sin\varphi-\right.$$
$$\left.-\frac{1+e\cos\varphi}{e^2\sin\varphi}[2e+(e^2+1)\cos\varphi]\right\}. \tag{8}$$

En reportant (8) dans (7) avec la précision jusqu'au premier ordre en $\zeta=\frac{m^2\alpha\gamma}{M^4}$ près, il vient

$$\frac{p}{r}=1+e\cos[(1+3\zeta)\varphi]+$$
$$+\zeta\frac{2e^2+1}{e}\sin^2\varphi-\zeta\frac{1+e\cos\varphi}{e}[2e+(e^2+1)\cos\varphi] \tag{9a}$$

soit

$$\frac{p'}{r}=1+e'\cos\lambda\varphi+f\cos 2\varphi,$$
$$\lambda=1+3\zeta,$$
$$p'=p\left(1+\zeta\frac{e^3-2e^2+5e-1}{2e}\right), \tag{9b}$$

---

*) Il est commode d'écrire (4) sous la forme

$$\delta\varphi=\frac{\partial}{\partial M}\int\frac{\sqrt{2m}\,\gamma\,dr}{r^3\sqrt{E-\frac{M^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r}}}$$

et de procéder à l'intégration en φ en conformité avec (5):

$$\delta\varphi=\frac{\partial}{\partial M}\frac{m^2\gamma\alpha}{M^3}\int(1+e\cos\varphi)\,d\varphi=$$
$$=-\frac{3m^2\gamma\alpha}{M^4}(\varphi+e\sin\varphi)+\frac{m^2\gamma\alpha}{M^3}\frac{\partial e}{\partial M}\sin\varphi+\frac{m^2\gamma\alpha}{M^3}\frac{\partial\varphi}{\partial M}(1+e\cos\varphi). \tag{8'}$$

En tirant de (5)

$$\frac{2M}{m\alpha^2 r}=\frac{\partial e}{\partial M}\cos\varphi-e\frac{\partial\varphi}{\partial M}\sin\varphi,\quad \frac{\partial e}{\partial M}=\frac{e^2-1}{eM}$$

et en reportant dans (8'), on obtient (8).

$$e' = e\left(1 + \zeta\frac{e^4 - 2e^3 - e^2 - 2}{2e^2}\right),$$

$$f = -\zeta\frac{e^3 + 2e^2 + e + 1}{2e}.$$

Au voisinage de $\varphi = 0$, π le développement (2) s'avère inapplicable, vu que $\delta\varphi$ croît indéfiniment. Toutefois l'équation de la trajectoire (9) se vérifie également dans ces régions (comp. avec problème (1.8)).

Au cas d'un mouvement infini ($E \geqslant 0$) l'équation (9) permet de résoudre le problème. Si, par contre, $E < 0$, (9) n'est l'équation de la trajectoire que pour quelques révolutions *), tant qu'on a $3\zeta\varphi \ll 1$. En ne conservant dans (8) que la partie accumulative $\delta\varphi = -3\zeta\varphi$, on obtient l'équation

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\lambda\varphi, \quad \lambda = 1 + 3\zeta \tag{10}$$

qui décrit la trajectoire sur un tronçon important (l'approximation zéro étant, à la différence de (5), l'approximation « correcte »; comp. avec problème 2.18). Il est également facile de transformer l'équation (9) pour qu'elle décrive la trajectoire sur un grand tronçon avec la précision jusqu'au premier ordre inclus près:

$$\frac{p'}{r} = 1 + e'\cos\lambda\varphi + f\cos 2\lambda\varphi. \tag{11}$$

2.25. Il suffit de se convaincre que la fonction de Lagrange exprimée en fonction des coordonnées du centre de masses $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ et du mouvement relatif $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ se divise en deux parties:

$$L = L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}),$$

$$L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + (e_1 + e_2)\,\mathcal{E}\mathbf{R},$$

$$L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{e_1 e_2}{r} + m\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mathcal{E}\mathbf{r}.$$

La fonction $L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$ définit le mouvement du centre des masses qui s'effectue de la même façon que le mouvement de la particule de masse $m_1 + m_2$ et de charge $e_1 + e_2$ au sein d'un champ uniforme. Le mouvement relatif défini par $L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ se réalise identiquement au mouvement de la particule de masse $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (masse réduite) dans les champs coulombien et uniforme.

*) En particulier, le rayon vecteur $\mathbf{r}$ doit se comporter comme une fonction périodique de φ.

Le même résultat peut être obtenu en partant évidemment des équations de mouvement des particules.

2.26. $L=\frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2+m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2}{2}+\frac{e_1}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)\dot{\mathbf{r}}_1+\frac{e_2}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_2)\dot{\mathbf{r}}_2$. La fonction de Lagrange se divise en deux parties ne contenant que $\mathbf{R}$, $\dot{\mathbf{R}}$ et $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ (notations du problème 2.25), au cas où $\frac{e_1}{m_1}=\frac{e_2}{m_2}$:

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}\dot{\mathbf{R}}^2+\frac{e_1+e_2}{c}\mathbf{A}(\mathbf{R})\dot{\mathbf{R}}+\frac{m}{4}\dot{\mathbf{r}}^2+\frac{e_1m_1^2+e_2m_2^2}{c(m_1+m_2)^2}\mathbf{A}(\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}.$$

2.27. $T=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{N}\mu_n\dot{\xi}_n^2$, $\mathbf{p}=\mu_N\dot{\xi}_N$, $\mathbf{M}=\sum\limits_{n=1}^{N}\mu_n[\xi_n,\ \dot{\xi}_n]$, où

$$\frac{1}{\mu_n}=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}m_k}+\frac{1}{m_{n+1}}\quad(n=1,\ \ldots,\ N-1),\quad \mu_N=\sum_{k=1}^{N}m_k$$

2.28. Désignons les coordonnées des particules incidente et primitivement au repos par x_1 et x_2. Soit à l'instant initial $x_1=-R$, $x_2=0$. Le centre des masses du système se meut en suivant la loi $X=-\frac{R}{2}+\frac{vt}{2}$. Le mouvement relatif de coordonnée $x=x_2-x_1$ suit la loi

$$t=-\sqrt{\frac{m}{4}}\int\limits_R^x\frac{dx}{\sqrt{\frac{mv^2}{4}-\frac{\alpha}{x^n}}}$$

La loi de mouvement de la première particule est

$$x_1=X-\frac{x}{2}=-\frac{R}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_x^R\frac{dx}{\sqrt{1-4\alpha/mv^2x^n}}-\frac{x}{2}.$$

La distance séparant les particules diminue jusqu'à la grandeur $x_{\min}=\left(\frac{mv^2}{4\alpha}\right)^{1/n}$, puis s'accroît de nouveau. Quand elle redevient égale à R, la première particule vient occuper le point

$$x_{1f}=x_{\min}\left[\int\limits_1^{R/x_{\min}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-z^{-n}}}-1\right)z-1\right]. \tag{1}$$

Le point d'arrêt de la particule incidente est la limite x_{1f} pour $R\to\infty$.

Si $n\leqslant 1$, $x_{1f}\to\infty$ pour $R\to\infty$, c'est-à-dire qu'après collision les deux particules s'éloignent à l'infini.

2.30. L'équation de mouvement

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{eg}{cr^3}[\mathbf{vr}], \tag{1}$$

possède une intégrale

$$\frac{mv^2}{2} = E, \tag{2}$$

$$m[\mathbf{rv}] - \frac{eg}{c}\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{J}. \tag{3}$$

Multiplions (1) scalairement par $\mathbf{r}$ et l'on obtient $\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}} = 0$ ou $\frac{d}{dt}\frac{r^2}{2} - v^2 = 0$, d'où

$$r^2 = r_0^2 + v^2(t - t_0)^2. \tag{4}$$

En multipliant (3) scalairement par $\mathbf{r}/r$, on obtient

$$-\frac{eg}{c} = J\cos\theta, \tag{5}$$

où θ est l'angle polaire dans le système sphérique des coordonnées d'axe z parallèle au vecteur $\mathbf{J}$. La projection de (3) sur l'axe z

$$mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta - \frac{eg}{c}\cos\theta = J$$

combinée à (5) donne

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2}. \tag{6}$$

Pour $t = t_0$ on a $v = r_0\dot{\varphi}\sin\theta$ et de (6) on tire: $J = \frac{mr_0v}{\sin\theta}$, et compte tenu de (5)

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{mr_0vc}{eg}. \tag{7}$$

En intégrant l'équation $\dot{\varphi} = \frac{r_0v}{\sin\theta \cdot r^2(t)}$, il vient

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{\sin\theta}\operatorname{arctg}\frac{v(t - t_0)}{r_0}. \tag{8}$$

La particule se meut donc à la vitesse constante v sur la surface d'un cône $\theta = \text{const}$. En introduisant

$$\psi = (\varphi - \varphi_0)\sin\theta, \tag{9}$$

récrivons (8) sous la forme

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{v(t - t_0)}{r_0}. \tag{10}$$

Les égalités (4), (9) et (10) peuvent s'interpréter de la façon suivante: le mouvement du point sur le développement du cône s'avère uniforme et rectiligne, r et ψ étant les coordonnées polaires du plan de développement.

2.31. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est défini par la fonction de Lagrange

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\,\mathbf{vA}, \tag{1}$$

où φ et $\mathbf{A}$ sont des potentiels scalaire et vecteur (voir [2], § 16, 17).

En recourant aux coordonnées cylindriques, on obtient

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c}\,\frac{\mathbf{m}r^2\dot{\varphi}}{(r^2+z^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

De l'équation de mouvement de z

$$m\ddot{z} + \frac{3e}{2c}\,\frac{\mathbf{m}r^2 z\dot{\varphi}}{(r^2+z^2)^{3/2}} = 0 \tag{3}$$

il s'ensuit que pour $z = 0$ la composante de la force parallèle à l'axe z s'annule. Donc si $z(0) = \dot{z}(0) = 0$, la trajectoire de la particule se trouve dans le plan $z = 0$. Comme φ est une coordonnée cyclique, on a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + \frac{e\mathbf{m}}{cr} = p_\varphi = \text{const}. \tag{4}$$

De là il découle qu'au cas d'un mouvement infini p_φ est la valeur de M_z pour $r \to \infty$. En outre le principe de la conservation de l'énergie est aussi satisfait (car $\partial L/\partial t = 0$):

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = E. \tag{5}$$

En éliminant de (5) $\dot{\varphi}$ à l'aide de (4), il vient

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E, \tag{6}$$

où

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2mr^2}\left(p_\varphi - \frac{e\mathbf{m}}{cr}\right)^2. \tag{7}$$

Donc le mouvement le long du rayon s'effectue de façon analogue au mouvement unidimensionnel dans le champ $U_{\text{eff}}(r)$.

Les graphiques de $U_{\text{eff}}(r)$ pour les cas de $p_\varphi < 0$ et $p_\varphi > 0$ sont donnés sur la figure 94, *a* et *b* respectivement.

Au cas où $p_\varphi < 0$ pour toute énergie $E > 0$ le mouvement est infini. Pour donner une image qualitative de la trajectoire, il est utile de déduire de (4)

$$\dot{\varphi} = -\frac{|p_\varphi|}{mr^2} - \frac{e\mathbf{m}}{mcr^3}. \tag{8}$$

La vitesse de rotation du rayon vecteur de la particule a tout le temps la même direction et elle s'accroît en se rapprochant du dipô-

le. La figure 95 (courbe *1*) fournit la forme approchée de la trajectoire. Cette trajectoire est symétrique par rapport à la droite joignant le centre du champ avec le point $r = r_{\min}$.

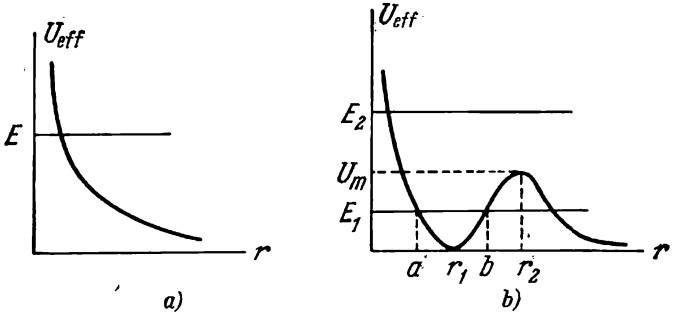


Fig. 94

Au cas où $p_\varphi > 0$, il peut se produire une diffusion de particules d'énergie quelconque $E > 0$, tandis qu'au cas de $E < U_m = \frac{c^2 p_\varphi^4}{32\, me^2 m^2}$

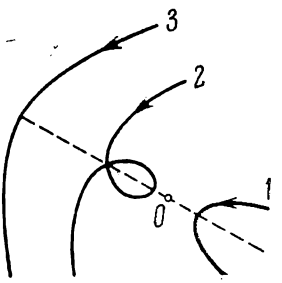


Fig. 95

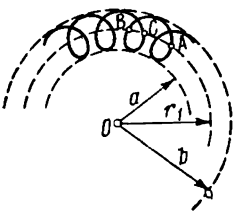


Fig. 96

($E = E_1$ sur la fig. 94, *b*) un mouvement fini est également possible. De l'égalité

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{em}{mcr^3}$$

il s'ensuit que $\dot{\varphi} > 0$ pour $r > r_1 = \frac{em}{cp_\varphi}$ et $\dot{\varphi} < 0$ pour $r < r_1$. Quand $r = r_1$, la particule présente des points d'arrêt en φ.

La particule d'énergie $E > U_m$ ($E = E_2$) sur la figure 94, *b* est diffusée et, en deux points $r = r_1$, sa vitesse est parallèle au rayon vecteur (fig. 95, courbe *2*).

Pour $E < U_m$ on peut avoir une diffusion sans points d'arrêt en φ (fig. 95, courbe *3*) ou un mouvement fini dans l'anneau $a \leqslant r \leqslant b$ (fig. 96). Dans le dernier cas la particule au cours de la période

accomplit un mouvement direct (tronçon AB) comme un mouvement de retour (tronçon BC).

2.32. a) Il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques et, en qualité de potentiel vecteur, de choisir la forme $A_\varphi = \frac{1}{2} r\mathscr{H}$, $A_z = A_r = 0$. Le mouvement en direction de l'axe z est uniforme, tandis que dans le plan perpendiculaire à l'axe z il est fini. La figure 97 donne la projection de la trajectoire sur ce plan. Les trajectoires a, b, c correspondent à la condition $p_\varphi > 0$ *) et, respectivement, $U_1 < E_\perp < U_2$, $E_\perp = U_2$, $U_2 < E_\perp$, où $E_\perp = E - \frac{mv_z^2}{2}$, $U_1 = (\tilde{\Omega} - \Omega)\, p_\varphi$, $U_2 = \frac{\lambda p_\varphi}{2\Omega}$, $\Omega = \frac{e\mathscr{H}}{2mc}$, $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \lambda}$. Pour $p_\varphi < 0$ la trajectoire est donnée sur la figure 97, d, pour $p_\varphi = 0$ sur la figure 97, e.

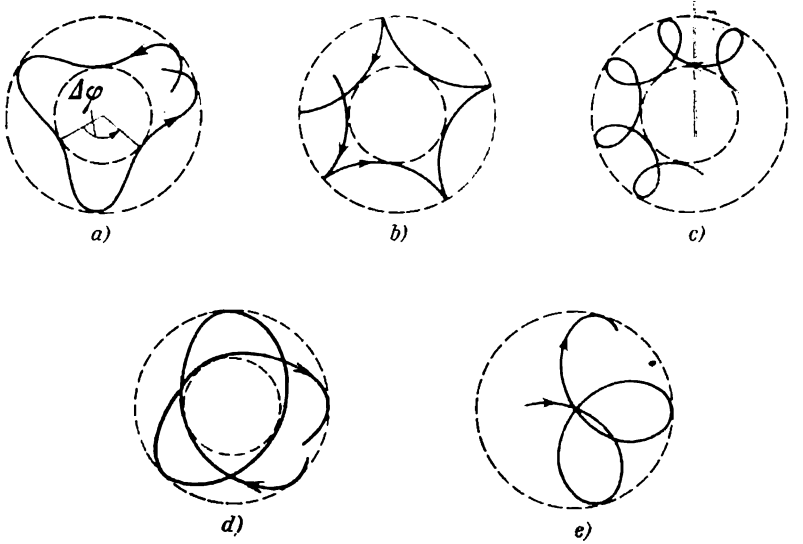


Fig. 97

La loi du mouvement de la particule dans ce plan se trouve facilement en connaissant le mouvement de l'oscillateur isotrope libre de pulsation $\tilde{\Omega}$ (voir [1], § 23, problème 3)

$$r^2 = a^2 \cos^2 \tilde{\Omega} t + b^2 \sin^2 \tilde{\Omega} t, \quad \varphi = -\Omega t + \operatorname{Arctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \tilde{\Omega} t\right)^{**)}.$$

*) Pour être plus concret, posons $\mathscr{H} > 0$, p_φ étant l'impulsion généralisée de la coordonnée φ correspondante.

**) Les branches de $\operatorname{Arctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} \tilde{\Omega} t\right)$ doivent être choisies de manière que l'angle φ soit une fonction continue de t.

Les rayons maximal (b) et minimal (a) se déterminent au moyen de l'énergie $E = \frac{m\widetilde{\Omega}^2}{2}(a^2 + b^2) - p_\varphi\Omega$ et de l'impulsion $p_\varphi = m\widetilde{\Omega}ab$, les origines de t et de φ étant choisies de la sorte que $\varphi(0) = 0$, $r(0) = a$. Il est à remarquer que la période d'oscillations radiales $T = \pi/\widetilde{\Omega}$ est indépendante de E et de p_φ. L'angle de rotation du rayon vecteur durant cette période $\Delta\varphi = \pi(\pm 1 - \Omega/\widetilde{\Omega})$ pour $p_\varphi \gtrless 0$ et $\Delta\varphi = -\Omega/\widetilde{\Omega}$ pour $p_\varphi = 0$ ne dépend pas de E *).

Comment variera le mouvement de la particule si $\lambda < 0$?

Il est intéressant de confronter le mouvement de la particule de ce problème avec le mouvement dans des champs électrique et magnétique croisés (voir [3], § 22).

2.33. L'équation de la trajectoire est

$$\varphi = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\left(\frac{p_\varphi}{mr^2} - \Omega\right) dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \tag{1}$$

où $\Omega = \frac{e\mathscr{H}}{2mc}$,

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{mr^2}{2}\left(\Omega - \frac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2.$$

De façon qualitative la nature du mouvement peut être interprétée au moyen des graphiques $U_{\text{eff}}(r)$. On doit alors tenir compte du fait que $\dot{\varphi}$ varie de signe quand r passe par la valeur $r_0 = \sqrt{\frac{p_\varphi}{m\Omega}}$. On obtient ainsi les trajectoires représentées sur la fig. 97, *a-e* **). Les trajectoires variées du dessin répondent aux conditions suivantes:

a) $p_\varphi > 0$, $U_{\min} < E < U_0$, où $U_{\min}$ est la valeur minimale de $U_{\text{eff}}(r)$, $U_0 = U_{\text{eff}}(r_0)$;

b) $p_\varphi > 0$, $E = U_0$;

c) $p_\varphi > 0$, $E > U_0$;

d) $p_\varphi < 0$;

e) $p_\varphi = 0$. Dans ce dernier cas la particule chute au centre aussitôt accomplie la première boucle.

Voyons en détail les deux derniers cas.

Ecrivons l'équation (1) sous la forme

$$\varphi = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E + p_\varphi\Omega + \frac{\alpha}{r} - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{m\Omega^2 r^2}{2}}} - \Omega t. \tag{2}$$

*) Une autre solution est donnée au problème 6.36.

**) La nature qualitative de l'étude à l'aide de graphiques permet de recourir à la même image approchée de la trajectoire que dans le problème 2.32. Il est bien entendu que les trajectoires précises sont différentes pour les deux problèmes.

On peut donc considérer que l'influence du champ magnétique se réduit au remplacement de l'énergie par $E' = E + p_\varphi \Omega$, à l'addition au champ $U = -\frac{\alpha}{r}$ d'un complément $\delta U = \frac{m\Omega^2 r^2}{2}$ (qui engendre la précession de l'orbite) et à une précession d'appoint de vitesse angulaire $-\Omega$. Pour des valeurs suffisamment petites du champ magnétique $\mathscr{H}$ le champ δU peut s'avérer un petit appoint à $U_0 = \frac{p_\varphi^2}{2mr} - \frac{\alpha}{r}$. Il suffit pour cela que dans toute la région du mouvement de la particule soit satisfaite la condition

$$\delta U(r) \ll |U_0(r)|. \tag{3}$$

La vitesse de précession engendrée par δU peut être définie ainsi

$$\Omega' = \frac{\delta\Delta\varphi}{T} = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial p_\varphi}(T\langle\delta U\rangle), \tag{4}$$

où la moyenne de δU est prise sur le mouvement de la particule dans le champ U_0 d'énergie E' et de moment p_φ, T étant la période de ce mouvement (comp. avec problème 2.17, 2.18). Le calcul *) conduit à la valeur

$$\Omega' = -\frac{3\Omega^2 p_\varphi}{2|E'|}, \tag{5}$$

δU étant considéré de fait comme une petite correction si avec (3) est aussi remplie la condition $\delta\Delta\varphi \ll 2\pi$, c'est-à-dire

$$\Omega^2 p_\varphi \alpha \sqrt{m}\,|E'|^{-5/2} \ll 1. \tag{6}$$

Il est bien entendu que δU ne peut être prise pour une petite correction au cas où $E' \geqslant 0$, car alors l'élimination de δU modifie de façon qualitative la nature du mouvement.

La grandeur Ω' peut s'avérer petite aussi bien que grande devant celle de Ω. Le signe de Ω' est opposé à celui de p_φ, c'est-à-dire que la direction de cette vitesse est contraire à celle du mouvement de la particule sur l'orbite. Quant à la direction de la vitesse Ω, elle est déterminée par le champ magnétique.

Bref, la trajectoire est une ellipse en précession à la vitesse angulaire

$$\Omega_{\text{préc}} = -\Omega + \Omega', \tag{7}$$

ou, pour être plus précis, comme on peut avoir $\Omega T \gtrsim 1$, dans le système de référence en rotation à la vitesse angulaire $\Omega_{\text{préc}}$ la trajectoire est tout simplement une ellipse immobile.

---

*) Pour le calcul de $\langle\delta U\rangle$ il est commode d'utiliser les variables des problèmes 2.18, 2.19. Comme la période dans le champ U_0 ne dépend pas de p_φ, on peut dans (4) sortir T du signe de la dérivée.

Il est intéressant de confronter les résultats obtenus avec le théorème de Larmor (voir [3], § 45, voir aussi problème 9.23).

Peut-il se présenter que δU soit prise pour une petite correction quand l'énergie de la particule E est positive?

Voyons ensuite le cas quand on peut assimiler à une petite correction le champ $U = -\alpha/r$. Le mouvement, une fois U éliminé, s'effectue suivant un cercle. Son rayon est a, tandis que la distance b

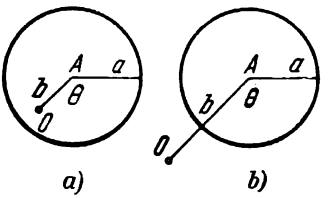


Fig. 98

de son centre au centre du champ peut s'exprimer au moyen des distances maximale et minimale de la particule du centre du champ

$$r_{1,2}^2 = \frac{E + p_\varphi\Omega \pm \sqrt{(E+2p_\varphi\Omega)E}}{m\Omega^2} \tag{8}$$

Deux variantes de disposition du cercle sont possibles; elles sont représentées sur la figure 98. Si $p_\varphi\Omega < 0$, on voit se réaliser le cas a), si $p_\varphi\Omega > 0$, c'est le cas b) qui se réalise. Dans les deux cas

$$b^2 = \frac{E + 2p_\varphi\Omega}{2m\Omega^2}, \quad a^2 = \frac{E}{2m\Omega^2} \tag{9}$$

Si l'on prend en compte le champ U, le cercle est alors soumis à un déportement systématique (appelé dérive), mais son rayon et sa distance du centre du champ, définis par les constantes a et b, ne varient pas, autrement dit son centre se déplace sur un cercle de rayon b. La vitesse angulaire de déplacement du centre du cercle est

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial p_\varphi}\langle U\rangle$$

où la moyenne de U est prise sur le mouvement uniforme suivant le cercle. Bornons-nous au cas où $a \ll b$. On peut alors considérer tout simplement que

$$\langle U\rangle = -\frac{\alpha}{b}, \tag{10}$$

de sorte que $\gamma = \frac{\alpha}{2m\Omega b^3}$. Remarquons que dans ce cas la vitesse linéaire de la dérive est égale à $e\mathscr{E}/\mathscr{H}$, où $e\mathscr{E} = \alpha/b^2$ est la force sollicitant la particule à la distance b (comp. [3], § 22).

2.34. Le problème de mouvement de deux particules chargées identiques dans un champ uniforme se réduit aux problèmes de mouvement du centre des masses et de mouvement relatif (voir problème 2.26).

Les coordonnées du centre des masses sont

$$\left.\begin{aligned} X &= R\cos\omega t, \\ Y &= -R\sin\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où $\omega = e\mathscr{H}/mc$.

Le mouvement relatif se confond avec celui de la particule de masse $m/2$ et dont la charge est $e/2$ dans le champ $U = e^2/r$ et le champ magnétique uniforme $\mathscr{H}$. Ce mouvement est analogue à celui étudié au problème précédent; il ne faut que substituer dans les formules $m/2$ à m, $e/2$ à e et $-e^2$ à α. Bornons-nous au cas où le rayon de l'orbite a est petit devant la distance au centre des masses (voir fig. 98, b). La pulsation des oscillations radiales peut s'obtenir aisément avec une plus grande précision que dans le problème précédent par développement de $U_{\text{eff}}(r) = \frac{e^2}{r} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{m}{16}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}p_\varphi\omega$ en série au voisinage de $r = b$ (voir [1], § 21). A partir de la condition $U'_{\text{eff}}(b) = 0$, il s'ensuit

$$p_\varphi = \sqrt{\frac{m^2}{16}\omega^2 b^4 - \frac{m}{2}e^2 b} \approx \frac{m}{2}b^2\left(\frac{\omega}{2} - \varphi\right), \quad \gamma = \frac{2e^2}{m\omega b^3}. \tag{2}$$

D'où on obtient en définitive pour $\omega_r = \sqrt{\frac{2U''_{\text{eff}}(b)}{m}}$ $\omega_r = \omega - \frac{\gamma}{2}$, quant à la distance entre les particules

$$r = b + a\cos(\omega_r t + \alpha) \tag{3}$$

Pour obtenir $\varphi(t)$, profitons du principe de conservation de l'impulsion généralisée $p_\varphi = \frac{m}{2}r^2\left(\dot{\varphi} + \frac{\omega}{2}\right)$. Avec la prise en compte de (2), (3), il vient

$$\varphi(t) = -\gamma t - \frac{a}{b}\sin(\omega_r t + \alpha) + \varphi_0. \tag{4}$$

En profitant de (3) et (4), on peut représenter les coordonnées du mouvement relatif sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi = b\cos(\gamma t - \varphi_0) + a\cos\left(\omega t + \frac{\gamma t}{2} + \beta\right), \\ y &= r\sin\varphi = -b\sin(\gamma t - \varphi_0) - a\sin\left(\omega t + \frac{\gamma t}{2} + \beta\right), \\ \beta &= \alpha - \varphi_0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Les premiers termes de la somme correspondent ici au mouvement du centre du cercle avec la vitesse de dérive $b\gamma$, tandis que les seconds au mouvement de ce cercle à la vitesse angulaire $\omega + \frac{\gamma}{2}$.

Les coordonnées des particules $x_{1,2} = X \pm \frac{x}{2}$, $y_{1,2} = Y \pm \frac{}{2}$ deviennent plus commodes si on les écrit sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm \frac{b}{2} \cos(\gamma t - \varphi_0) + \rho_{1,2} \cos(\omega t + \psi_{1,2}), \\ y_{1,2} &= \mp \frac{b}{2} \sin(\gamma t - \varphi_0) - \rho_{1,2} \sin(\omega t + \psi_{1,2}), \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

où

$$\rho_{1,2} = \sqrt{R^2 + \frac{a^2}{4} \pm aR \cos\left(\frac{\gamma t}{2} + \beta\right)},$$

$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \frac{\pm a \sin\left(\frac{\gamma t}{2} + \beta\right)}{2R \pm a \cos\left(\frac{\gamma t}{2} + \beta\right)}.$$

Bref, les centres des cercles sur lesquels se meuvent les particules tournent autour de l'origine de coordonnées à la vitesse angulaire γ

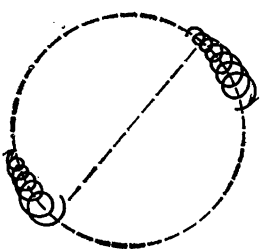


Fig. 99

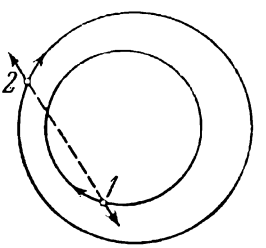


Fig. 100

(en dérivant à la vitesse $b\gamma/2$), quant aux rayons de ces cercles, ils sont soumis aux pulsations de fréquence $\gamma/2$ (fig. 99).

Le mécanisme de « pompage » de l'énergie se comprend mieux dans un autre cas limite : $a \gg b$ (la distance entre les centres des orbites décrites par les particules est petite devant les rayons des orbites (fig. 100)). Vraisemblablement, le travail développé par les forces d'interaction sur la seconde particule est positif, tandis que sur la première il est négatif durant nombre de périodes.

2.35. Il n'est pas difficile de s'assurer de la constante de cette grandeur en recourant aux équations de mouvement (comp. [1], § 15), cette dernière, pour plus de commodité, prenant la forme $\mathbf{AF} + \frac{1}{2}[\mathbf{Fr}]^2$, où $\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$. Pour des petites valeurs de F la trajectoire se rapproche de l'ellipse dont le grand demi-axe suit

la direction du vecteur **A** et l'excentricité est $e = |\mathbf{A}|/\alpha$. Dans ce cas $\mathbf{AF} \approx$ const, ou $e \cos \psi =$ const, ψ étant l'angle entre **A** et **F**.

2.36. L'apparition d'une petite adjonction à l'énergie potentielle $\delta U(\mathbf{r})$ entraîne une modification des grandeurs caractérisant le mouvement de la particule (moment, position du périhélie, etc.), en outre durant un petit laps de temps (quelques périodes de mouvement non perturbé) elles varient également peu. Toutefois durant un temps prolongé les variations s'accumulent, de sorte que certaines grandeurs peuvent se modifier plusieurs fois.

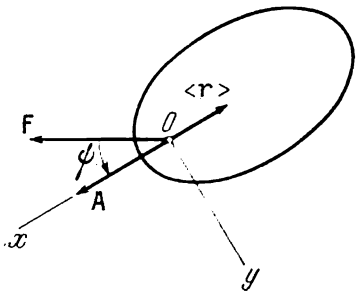


Fig. 101

En particulier, durant un petit laps de temps l'orbite demeure une ellipse. Le grand demi-axe de cette ellipse $a = \frac{\alpha}{2|E|}$ se détermine d'après l'énergie et ne varie pas durant un temps prolongé. Quant à l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{M^2}{m\alpha a}}$ et à l'orientation, leurs variations peuvent s'accumuler.

a) La variation du moment se définit par l'équation

$$\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{rF}]. \tag{1}$$

Prenons la moyenne sur la période

$$\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle = [\langle \mathbf{r} \rangle \mathbf{F}], \tag{2}$$

où

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{r}(t)\, dt. \tag{3}$$

Pour la prise de moyenne, on se sert du système de coordonnées aux axes Oz parallèle à **M** et Ox parallèle à **A** (fig. 101). (Ici $\mathbf{A} = [\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$ est l'intégrale complémentaire du problème de Kepler; rappelons que le vecteur **A** est dirigé du centre du champ vers le périhélie, tandis que $|\mathbf{A}| = \alpha e$.) Il est évident que $-\langle \mathbf{r} \rangle$ est parallèle à Ox. En reportant $x = a(\cos \xi - e)$, $t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e \sin \xi)$, il vient

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \xi - e)(1 - \cos \xi)\, d\xi = -\frac{3ae}{2}. \tag{4}$$

Soit

$$\langle \mathbf{r} \rangle = -\frac{3ae}{2} \frac{\mathbf{A}}{|A|} = -\frac{3a}{2\alpha} \mathbf{A}. \tag{5}$$

b) Si la force **F** est perpendiculaire à **M**, alors, par symétrie, on déduit aussitôt que l'orbite est une courbe plane, quant au vecteur **M** il conserve sa direction (au signe près). Récrivons (2), (5) en laissant tomber le signe de la moyenne sous la forme

$$\dot{M} = \frac{3ae}{2} F \sin \psi, \tag{6}$$

où ψ est l'angle entre **A** et **F**. En tenant compte de ce que

$$e \cos \psi = \varepsilon = \text{const} \tag{7}$$

(voir problème 2.35) et éliminant de (6) e et ψ, il vient

$$\dot{M} = \frac{3aF}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 - \frac{M^2}{ma\alpha}}. \tag{8}$$

En intégrant l'équation (8), on obtient

$$M = M_0 \cos (\Omega t + \beta), \tag{9}$$

où

$$\Omega = \frac{3F}{2} \sqrt{\frac{a}{m\alpha}}, \quad M_0 = \sqrt{ma\alpha (1 - \varepsilon^2)},$$

et

$$e = \sqrt{1 - (1 - \varepsilon^2) \cos^2 (\Omega t + \beta)}.$$

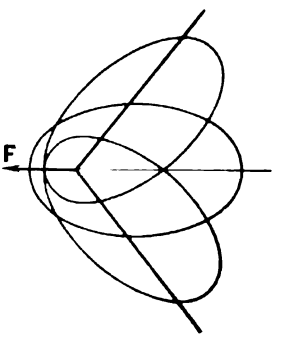


Fig. 102

Donc, la trajectoire est une ellipse oscillant autour de la direction de **F** et variant en accord avec les oscillations son excentricité (fig. 102). La direction du mouvement de la particule sur l'ellipse varie également (avec le signe de M). La période de l'oscillation de l'ellipse $2\pi/\Omega$ est beaucoup supérieure à la période de révolution de la particule sur l'ellipse T.

c) Dans le cas général examinons également la variation du vecteur **A**. En recourant aux équations de mouvement, il est aisé d'obtenir

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{m} [\mathbf{FM}] + [\mathbf{v}\,[\mathbf{rF}]]. \tag{10}$$

Pour la prise de la moyenne de (10), recourons aux égalités

$$\left.\begin{aligned} \langle x\dot{x}\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{x^2}{2} \right\rangle = 0, \\ \langle y\dot{y}\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{y^2}{2} \right\rangle = 0, \\ \langle x\dot{y}\rangle + \langle y\dot{x}\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} xy \right\rangle = 0, \\ \langle x\dot{y}\rangle - \langle y\dot{x}\rangle &= \frac{M}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Il vient

$$\langle \dot{\mathbf{A}} \rangle = \frac{3}{2m} [\mathbf{FM}]. \tag{12}$$

Bref, pour les moyennes de **M** et **A** prises sur la période (le symbole de la moyenne est négligé dans la suite) on obtient le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \frac{3}{2m} [\mathbf{FM}], \\ \dot{\mathbf{M}} &= \frac{3a}{2\alpha} [\mathbf{FA}] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Les composantes parallèles à **F** de ces vecteurs se conservent:

$$\mathbf{MF} = \text{const}, \quad \mathbf{AF} = \text{const}, \tag{14}$$

ce résultat peut être obtenu aisément à partir d'autres considérations. Pour la composante transversale de **M**

$$\mathbf{M}_\perp = \mathbf{M} - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{MF})}{F^2} \tag{15}$$

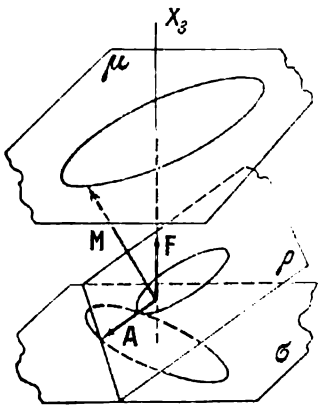


Fig. 103

on obtient de (13) l'équation

$$\ddot{\mathbf{M}}_\perp + \Omega^2 \mathbf{M}_\perp = 0. \tag{16}$$

Sa solution sera transcrite en introduisant le système de coordonnées $OX_1X_2X_3$ d'axe X_3 parallèle à **F**:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= B_1 \cos \Omega t + C_1 \sin \Omega t, \\ M_2 &= B_2 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Maintenant on tire de (13)

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\frac{3F}{2m\Omega} (B_2 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t), \\ A_2 &= \frac{3F}{2m\Omega} (B_1 \sin \Omega t - C_1 \cos \Omega t). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Les constantes $B_{1,\,2}$, $C_{1,\,2}$ se déterminent, comme il fallait s'y attendre, par les valeurs initiales des vecteurs **M** et **A**.

L'extrémité du vecteur **M** décrit une ellipse dont le centre se trouve sur l'axe X_3 de plan μ parallèle à OX_1X_2 (fig. 103.). L'extrémité du vecteur **A** décrit également une ellipse de centre sur l'axe X_3 dans le plan σ parallèle à μ, qui est semblable à la première et a subi une rotation de $\pi/2$. En outre, **A** est toujours perpendiculaire à **M**. Le plan de la trajectoire est perpendiculaire à **M**, le vecteur **A** déterminant la direction sur le périhélie de l'orbite.

Bref, le plan de la trajectoire pivote (est en « précession ») autour de **F**. L'angle formé par le plan de l'orbite ρ avec **F** oscille dans ce

cas autour d'une certaine valeur moyenne. Autour de cette valeur moyenne oscillent également l'excentricité et l'angle engendré par la projection de **F** sur le plan ρ et la direction sur le périhélie. Tous ces mouvements s'effectuent avec la pulsation Ω.

Rappelons qu'on a négligé les corrections du premier ordre en **F** si ces dernières n'aboutissaient pas à des effets accumulés. La solution est valable pour le laps de temps correspondant à quelques périodes de précession de l'orbite.

La prise en compte d'approximations suivantes n'impliquera-t-elle pas la variation de la nature du mouvement (par exemple, la fuite de la particule à l'infini)? La solution précise du problème du mouvement de la particule dans le champ $U = -\frac{\alpha}{r} - \mathbf{Fr}$, possible en coordonnées paraboliques (voir problème 12.12b), montre que pour $E < 0$ et pour des **F** suffisamment petits on n'observe pas d'effets semblables.

Soulignons que l'apparition de variations accumulées de l'orbite sous l'action de perturbations aussi petites que l'on veut est en rapport avec la dégénérescence du mouvement non perturbé.

On peut trouver la solution de ce problème, en utilisant la théorie canonique des perturbations, dans [5], § 7.3.

2.37. Selon le théorème de Larmor (voir [2], § 45), l'orbite de la particule dans un champ magnétique uniforme $\mathfrak{H}$ est en rotation autour du centre du champ coulombien à la vitesse $\Omega = -\frac{q\mathfrak{H}}{2mc}$, où q est la charge de la particule. Dans ce cas les vecteurs **M** et **A** varient avec les vitesses

$$\dot{\mathbf{M}}_1 = [\Omega \mathbf{M}] \quad \dot{\mathbf{A}}_1 = [\Omega \mathbf{A}] \tag{1}$$

Les vitesses moyennes sur la période de variation des vecteurs **M** et **A** sous l'action d'une force constante $\mathbf{F} = q\mathfrak{E}$ ont été déterminées au problème précédent (voir formule (13)):

$$\dot{\mathbf{M}}_2 = \frac{3a}{2\alpha}[\mathbf{FA}], \quad \dot{\mathbf{A}}_2 = \frac{3}{2m}[\mathbf{FM}]. \tag{2}$$

Les vitesses moyennes de la variation des vecteurs **M** et **A** soumis à l'action des deux champs sont:

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}}_1 + \dot{\mathbf{M}}_2, \quad \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2. \tag{3}$$

a) Dirigeons l'axe x suivant le champ électrique et l'axe y suivant le champ magnétique. L'équation (3) prend alors la forme

$$\dot{A}_x = -\Omega A_y, \quad \dot{A}_y = \Omega A_x - \frac{3F}{2m} M, \quad \dot{M} = \frac{3aF}{2\alpha} A_y.$$

La solution de ce système est :

$$A_x = -\frac{\Omega}{\omega} B \cos(\omega t + \beta) + C,$$

$$A_y = B \sin(\omega t + \beta),$$

$$M = \frac{3aF}{2\alpha\omega} B \sin(\omega t + \beta) + \frac{2m\Omega}{3F} C,$$

où $\omega = \sqrt{\Omega^2 + 9aF^2/4m\alpha}$, tandis que les constantes B, β, C se définissent à partir des valeurs initiales de **A** et **M**.

Bref, l'extrémité du vecteur **A** se meut sur une ellipse dont les axes sont parallèles aux aves x et y (fig. 104) et le centre se trouve

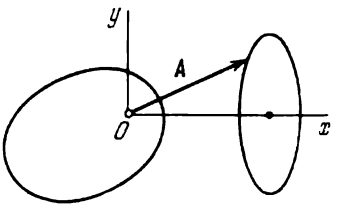


Fig. 104

sur l'axe x. L'orbite oscille dans ce cas (ou tourne pour $\Omega B > \omega C$) l'excentricité variant périodiquement. Pour $9aF^2B > 4m\alpha\Omega\omega C$, l'orbite elliptique s'étire périodiquement en un segment.

b) En posant $\Omega_F = \frac{3F}{2}\sqrt{\frac{a}{m\alpha}}$, $\mathbf{N} = \mathbf{A}\sqrt{\frac{m\alpha}{a}}$, on peut écrire (3) sous la forme $\dot{\mathbf{M}} = [\Omega\mathbf{M}] + [\Omega_F\mathbf{N}]$, $\dot{\mathbf{N}} = [\Omega\mathbf{N}] + [\Omega_F\mathbf{M}]$. En additionnant et en soustrayant ces équations, il vient

$$\dot{\mathbf{J}}_{1,\,2} = [\boldsymbol{\omega}_{1,\,2}\mathbf{J}_{1,\,2}],$$

où

$$\mathbf{J}_{1,\,2} = {}^1/_2\,(\mathbf{M} \pm \mathbf{N}), \quad \boldsymbol{\omega}_{1,\,2} = \boldsymbol{\Omega} \pm \boldsymbol{\Omega}_F.$$

Donc les vecteurs $\mathbf{J}_{1,\,2}$ tournent avec des vitesses angulaires constantes $\boldsymbol{\omega}_{1,\,2}$:

$$\mathbf{J}_{1,2}(t) = \mathbf{J}_{1,2}(0)\cos\omega_{1,2}t + \left[\frac{\boldsymbol{\omega}_{1,2}}{\omega_{1,2}}\mathbf{J}_{1,2}(0)\right]\sin\omega_{1,2}t + \boldsymbol{\omega}_{1,2}\frac{\mathbf{J}_{1,2}(0)\,\boldsymbol{\omega}_{1,2}}{\omega_{1,2}^2}(1 - \cos\omega_{1,2}t),$$

les vecteurs $\mathbf{M} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ et $\mathbf{A} = \sqrt{\frac{a}{m\alpha}}(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2)$ se déterminant complètement à partir de leurs valeurs initiales.

On n'analysera pas en détail cette réponse. Notons seulement que $\omega_1 = \omega_2$ si les champs électrique et magnétique sont mutuellement perpendiculaires.

2.38. Soit une particule qui se meut sur le plan xz. Les équations pour le vecteur A (voir formule (10) du problème 2.36) peuvent être écrites sous la forme

$$\dot{A}_x = -2\beta\,(5xz\dot{z} - 2\dot{x}z^2) = \frac{6\beta}{m}\,zM - 2\beta\,\frac{d}{dt}\,xz^2,$$

$$\dot{A}_z = 2\beta\,(4\dot{x}xz - \dot{z}x^2) = \frac{4\beta}{m}\,xM + 2\beta\,\frac{d}{dt}\,xz^2,$$

où $M = m\,(z\dot{x} - x\dot{z})$ est une fonction du temps qui varie lentement.

Après la prise de moyenne pour ces équations, il vient

$$\dot{\mathbf{A}}_x = 6\beta M\,\langle z\rangle = -9\,\frac{\beta a}{m\alpha}\,A_z M,$$

$$\dot{\mathbf{A}}_z = 4\beta M\,\langle x\rangle = -6\,\frac{\beta a}{m\alpha}\,A_x M,$$

où a est le grand demi-axe de l'ellipse. D'où il vient

$$\frac{\dot{A}_x}{\dot{A}_z} = \frac{3A_z}{2A_x},$$

autrement dit, à la différence du problème 2.36b, l'extrémité du vecteur A oscille non pas sur une droite mais sur une hyperbole

$$A_x^2 = \frac{3}{2}\,A_z^2 + \text{const}.$$

La dépendance de A du temps peut être obtenue sur la base de l'équation

$$t = -\frac{m\alpha}{9\beta a}\int\frac{dA_x}{MA_z},$$

dans laquelle M et A_z doivent être exprimés comme des fonctions de A_x.

Par exemple, au cas où à l'origine on a $A_z(0) = 0$, $A_x(0) = \alpha e_0$ (e_0 étant la valeur initiale de l'excentricité), on obtient

$$A_z = -\alpha\sqrt{\frac{2}{3}\,(x^2 - e_0^2)}, \qquad M = \sqrt{\frac{5}{3}\,m\alpha a\,(c^2 - x^2)},$$

$$x = \frac{A_x}{\alpha}, \qquad c = \sqrt{\frac{3 + 2e_0^2}{5}}.$$

Avec le temps l'orbite pivote lentement dans le plan xz et se transforme en un segment formant avec l'axe x l'angle

$$\psi = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}\,k} \qquad k = \sqrt{\frac{3 - 3e_0^2}{3 + 2e_0^2}},$$

durant le temps

$$t=\frac{1}{3\beta}\sqrt{\frac{m\alpha}{10a^3}}\int_{e_0}^{c}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-e_0^2)(c^2-x^2)}}.$$

L'intégrale qui y entre se réduit à l'intégrale elliptique complète de première espèce (voir note au problème 1.7 et [10], p. 96-97)

$$t=\frac{T\alpha}{6\pi\sqrt{10c}\,\beta a^3}K(k),$$

où T est la période du mouvement non perturbé.

2.39. La fonction de Lagrange du système (q étant la charge de la particule)

$$L=\frac{mv^2}{2}+\frac{\alpha}{r}+\frac{q}{c}\frac{[\mathbf{mr}]}{r^3}\mathbf{v}$$

ne diffère de celle étudiée dans [2] (problème 2 du § 105) que pour les notations. Les équations de mouvement

$$\dot{\mathbf{M}}=\frac{q}{mcr^2}[\mathbf{Mm}],$$

$$\dot{\mathbf{A}}=\frac{q}{mcr^3}[\mathbf{Am}]+\frac{3q(\mathbf{Mm})}{m^2cr^5}[\mathbf{Mr}]$$

après la prise de la moyenne sur la période T du mouvement non perturbé fournissent les équations décrivant la variation systématique des vecteurs $\mathbf{M}$ et $\mathbf{A}$:

$$\langle\dot{\mathbf{M}}\rangle=[\mathbf{\Omega}'\mathbf{M}],\quad \mathbf{\Omega}'=-\frac{q\mathbf{m}}{cma^3(1-e^2)^{3/2}},\tag{1}$$

$$\langle\dot{\mathbf{A}}\rangle=[\mathbf{\Omega}\mathbf{A}],\quad \mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}'-3\mathbf{M}\frac{(\mathbf{\Omega}'\mathbf{M})}{M^2},\tag{2}$$

où a et e sont le grand demi-axe et l'excentricité de l'orbite non perturbée. L'équation (1) peut être récrite également sous la forme

$$\langle\dot{\mathbf{M}}\rangle=[\mathbf{\Omega}\mathbf{M}],\tag{3}$$

car le vecteur $\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}'$ est parallèle à $\mathbf{M}$.

(2) et (3) montrent que l'ellipse parcourue par la particule subit « en bloc » une précession de pulsation $\mathbf{\Omega}$. Une autre interprétation peut être fournie sur la base des équations (1) et (2) : dans le système de coordonnées en rotation avec la pulsation $\mathbf{\Omega}'$ le vecteur $\mathbf{M}$, et avec lui le plan où se meut la particule, demeure immobile, quant au vecteur $\mathbf{A}$, et avec lui le périhélie de l'orbite, il effectue une rotation de pulsation constante $\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Omega}'$ autour de la direction de $\mathbf{M}$.

Notons encore que la moyenne des grandeurs $1/r^3$ et $\mathbf{r}/r^5$ s'obtient plus facilement en passant de la variable t à l'angle φ:

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3(t)} = \frac{m}{TM} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r(\varphi)} = \frac{m}{TMp} \int_0^{2\pi} (1 + e\cos\varphi)\, d\varphi = \frac{2\pi m}{TMp},$$

et

$$\left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^5} \right\rangle = \beta \mathbf{A},$$

$$\beta = \frac{1}{A^2 T} \int_0^T \frac{\mathbf{A}\mathbf{r}}{r^5}\, dt = \frac{m}{ATM} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r^2(\varphi)}\, d\varphi = \frac{2\pi m e}{TMp^2}.$$

2.40. En prenant la moyenne des équations (voir formule (10) du problème 2.36)

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{m} [\mathbf{F}\mathbf{M}] + [\mathbf{v}[\mathbf{r}\mathbf{F}]],$$

tenons compte de ce que $\langle \mathbf{F} \rangle = 0$ et que selon les équations du mouvement non perturbé

$$m\ddot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} m\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}\left(-\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\frac{\alpha \mathbf{v}}{r^3} + \frac{3\alpha \mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{v})}{r^5}.$$

On obtient ainsi (voir problème précédent)

$$\langle \dot{\mathbf{A}} \rangle = -\frac{\alpha\beta}{m^2} \left\langle \frac{[\mathbf{v}\mathbf{M}]}{r^3} \right\rangle = \frac{\alpha\beta}{m^2} \left\langle \frac{\mathbf{A}}{r^3} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^4} \right\rangle = -\frac{3\pi\alpha\beta}{2m^2 a^3 (1-e^2)^{3/2}} \mathbf{A}.$$

Il s'ensuit que la vitesse de variation du vecteur $\mathbf{A}$ est orientée du côté opposé au vecteur même $\mathbf{A}$. Or le vecteur $\mathbf{A}$ est dirigé vers le périhélie de l'orbite et vaut en grandeur $A = \alpha e$. Donc la force additionnelle n'engendre pas la précession de l'orbite mais implique une diminution de l'excentricité.

On peut de même montrer (voir [2], § 75, problème 1) qu'avec la perte de l'énergie et du moment la particule chutera en fin de compte au centre.

§ 3. Section de diffusion dans un champ donné. Choc de particules

3.1. a) Comme il est facile de voir d'après la figure 105, l'angle d'écart de la particule θ est égal au double de l'angle d'inclinaison de la tangente relativement à la surface au point de choc. D'où

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{d\rho}{dz} = \frac{b}{a} \cos \frac{z}{a}.$$

De là on tire

$$\rho^2 = b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$$

et

$$d\sigma = \pi |d\rho^2| = \pi a^2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{a^2\, do}{4 \cos^4 \frac{\theta}{2}}.$$

L'écart de la particule d'angles différant de zéro (pour $\rho \to b$) est

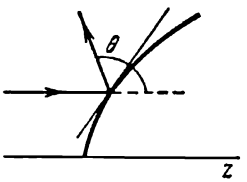


Fig. 105

possible jusqu'à la valeur $\theta_m = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ (pour $\rho \to 0$).

Bref,

$$d\sigma = \begin{cases} \dfrac{a^2\, do}{4 \cos^4 \frac{\theta}{2}} & \text{pour } 0 < \theta < \theta_m, \\ 0 & \text{pour } \theta_m < \theta. \end{cases}$$

b) $$d\sigma = A^{\frac{2}{1-n}} \left(n \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1+n}{1-n}} \frac{do}{(1-n) \sin\theta \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Pour $n \to 1$ la section donnée vaut

$$\frac{d\sigma}{do} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \theta > \theta_0 = 2 \operatorname{arctg} A, \\ \infty & \text{pour } \theta < \theta_0. \end{cases}$$

Ce résultat est faux. Pourquoi?

c) $$d\sigma = \begin{cases} \dfrac{b}{4}\left(a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} - b\right) \dfrac{do}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin\theta} & \\ & \text{pour } 0 < \theta < \theta_m = 2 \operatorname{arctg} \left(\dfrac{b}{a}\right)^2, \\ 0 & \text{pour } \theta_m < \theta. \end{cases}$$

3.2. Le paraboloïde de révolution $\rho^2 = \frac{\alpha}{E} z$.

Les trajectoires des particules diffusées dans le champ et sur le paraboloïde convergent-elles quand $r \to \infty$?

3.3. Pour $E > V$

$$d\sigma = \begin{cases} \left[\dfrac{a^2 n^2}{4\cos\frac{\theta}{2}} \dfrac{\left(n\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\left(n-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+n^2-2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} + \dfrac{a^2}{4}\right] do & \text{pour } 0<\theta<\theta_m, \\ 0 & \text{pour } \theta_m = 2\arccos n < \theta < \pi, \end{cases}$$

où

$$n = \sqrt{1 - V/E}.$$

Quelle est la raison de la différence entre cette section et celle de diffusion sur un puits (cuvette) de potentiel (voir [1], § 19, problème 2)?

3.4. a)

$$\sigma = \begin{cases} \pi\left(\dfrac{\beta}{E} - \dfrac{\alpha^2}{4E^2}\right) & \text{pour } E > \dfrac{\alpha^2}{4\beta}, \\ 0 & \text{pour } E < \dfrac{\alpha^2}{4\beta}. \end{cases}$$

Comment variera la section avec le changement du signe de α?

b) $$\sigma = \begin{cases} \pi\left(2\sqrt{\dfrac{\gamma}{E}} - \dfrac{\beta}{E}\right) & \text{pour } E > \dfrac{\beta^2}{4\gamma}, \\ 0 & \text{pour } E < \dfrac{\beta^2}{4\gamma}. \end{cases}$$

3.5. a) Examinons le mouvement d'un faisceau de particules dans le champ $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$. Les graphiques de $U_{\text{eff}}(r) = \frac{E\rho^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$ sont donnés sur la figure 106 pour différentes valeurs du paramètre d'impact ρ.

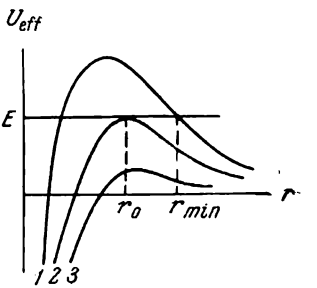


Fig. 106

Pour des ρ grands (courbe *1*) la particule est diffusée et s'approche du centre du champ à la distance $r_{\min}(\rho)$ définie par la condition $U_{\text{eff}}(r_{\min}) = E$. Avec la diminution de ρ on voit diminuer aussi $r_{\min}$ jusqu'à la valeur de r_0 incluse qu'on atteint pour $\rho = \rho_0$ (courbe *2*). Pour des valeurs encore plus petites de ρ, la particule chute au centre (courbe *3*).

Les grandeurs r_0 et ρ_0 se déterminent d'après les conditions

$$U_{\text{eff}}(r_0) = E, \quad U'_{\text{eff}}(r_0) = 0$$

et valent

$$r_0 = (n-2)^{1/n} \left(\frac{2E}{\alpha}\right)^{1/n}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \left[\frac{(n-2)\alpha}{2E}\right]^{1/n}.$$

Si $R > r_0$, sur la bille tombent des particules avec $r_{\min} \leqslant R$ et la section de la chute

$$\sigma = \pi\rho^2 (r_{\min} = R) = \pi R^2 \left(1 + \frac{\alpha}{ER^2}\right).$$

Si $R < r_0$, sur la bille tombent des particules qui chuteraient au centre, et la section de chute

$$\sigma = \pi\rho_0^2 = \frac{\pi n}{n-2} \left[\frac{(n-2)\alpha}{2E}\right]^{2/n}.$$

b) $\sigma = \pi \left(2\sqrt{\frac{\gamma}{E}} - \frac{\beta}{E}\right)$ au cas où $2\sqrt{\gamma E} > \beta$, $ER^4 < \gamma$.

Si l'une de ces égalités au moins n'est pas satisfaite, alors

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{\gamma}{ER^4} - \frac{\beta}{ER^2}\right).$$

3.6. a) $d\sigma = \dfrac{R^2(1+\lambda)\,do}{4\left(1+\lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}$, où

$$\lambda = \frac{4RE(RE+\alpha)}{\alpha^2}.$$

Comment interpréter le résultat obtenu avec $\alpha + 2RE = 0$?

b) Dans le plan de la trajectoire de la particule, introduisons les coordonnées cartésiennes d'axe x dirigé suivant l'axe du faisceau et d'axe y, suivant le paramètre d'impact. Le mouvement de la particule dans la région $r \leqslant R$ est une oscillation harmonique le long de chacune des coordonnées, de plus à l'instant origine de cette oscillation (pour $t = 0$) $y_0 = \rho$, $\dot{y}_0 = 0$, $x_0 = -\sqrt{R^2 - \rho^2}$, $\dot{x}_0 = v$, de sorte que

$$x = -\sqrt{R^2 - \rho^2} \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t, \quad y = \rho \cos \omega t. \tag{1}$$

L'instant de sortie de la particule de la région d'action des forces est déterminé par la condition

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{2}$$

quant à l'angle θ entre la vitesse de la particule à cet instant et l'axe x, il est régi par la condition

$$\sin \theta = \frac{y}{v} = -\frac{\rho\omega}{v} \sin \omega t. \tag{3}$$

En reportant (1) et (3) dans (2), on obtient l'équation

$$\rho^4 - \rho^2 R^2 (1 + \lambda \sin^2 \theta) + \frac{1}{4} R^4 (1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta = 0,$$

où $\lambda = \frac{v^2}{R^2 \omega^2}$. D'où

$$\rho_{1,2}^2 = \frac{R^2}{2} (1 + \lambda \sin^2 \theta \mp \sqrt{\cos^2 \theta - \lambda^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}),$$

et, par suite, la section

$$d\sigma = \pi (|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2|) = \pi d (\rho_1^2 - \rho_2^2) = \frac{R^2 (1 + \lambda^2 \cos 2\theta) do}{2 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}}.$$

Si $\lambda > 1$, la diffusion n'est possible qu'avec des angles plus petits que $\theta_m = \arcsin \frac{R^2 \omega^2}{v^2}$, tandis que pour $\theta \to \theta_m$ la section $\frac{d\sigma}{do}$ croît indéfiniment. Cette particularité de la diffusion s'appelle *irisation* (voir [11], ch. 5, § 5). C'est une particularité de ce genre qui conduit à la formation de l'arc-en-ciel par diffusion de la lumière par des gouttes d'eau.

Voir également des exemples d'irisation dans les problèmes 3.8, 3.10.

3.7. a)

$$\frac{d\sigma}{do} = \begin{cases} \frac{a^2 \theta_m^2 (\theta_m - \theta)}{\theta^3 (2\theta_m - \theta)^2} & \text{pour } \theta \leqslant \theta_m = \pi \frac{V}{E}, \\ 0 & \text{pour } \theta > \theta_m. \end{cases}$$

b) Lors du calcul de l'angle de diffusion (voir [1], § 20)

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_y \, dx}{2E} = 2 \frac{V}{E} \frac{\rho \sqrt{R^2 - \rho^2}}{R^2}$$

tenons compte de ce que

$$F_y = \begin{cases} \frac{2Vy}{R^2} = \frac{2V\rho}{R^2} & \text{pour } -\sqrt{R^2 - \rho^2} < x < \sqrt{R^2 - \rho^2}, \\ 0 & \text{pour } |x| > \sqrt{R^2 - \rho^2}. \end{cases}$$

De là on trouve $\rho_{1,2}^2 = \frac{1}{2} R^2 (1 \mp \sqrt{1 - \theta^2/\theta_m^2})$, où $\theta_m = V/E$, et par suite, $d\sigma = \pi (|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2|) = \pi d (\rho_1^2 - \rho_2^2)$. Et, en définitive

$$d\sigma = \begin{cases} \frac{R^2 \, do}{2\theta_m \sqrt{\theta_m^2 - \theta^2}} & \text{pour } 0 < \theta < \theta_m, \\ 0 & \text{pour } \theta > \theta_m. \end{cases}$$

Comparer cette réponse avec celle du problème 3.6b dans lequel on a envisagé un potentiel qui différait de signe du potentiel donné.

3.8. L'angle de déviation de la particule

$$\theta = \left| \frac{3\pi\beta}{4E\rho^4} - \frac{\pi a}{2E\rho^2} \right| \qquad (1)$$

se calcule aisément d'après la formule générale *). La courbe $\theta(\rho^2)$ est représentée sur la figure 107. De (1), il vient

$$\rho_1^2 = \frac{\alpha\pi}{4E\theta}\left(\sqrt{1+\frac{\theta}{\theta_m}} - 1\right),$$

$$\rho_{2,3}^2 = \frac{\alpha\pi}{4E\theta}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{\theta}{\theta_m}}\right),$$

où $\theta_m = \frac{\pi\alpha^2}{12E\beta}$. La section vaut

$$d\sigma = \pi\left(|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2| + |d\rho_3^2|\right) = \pi d\left(-\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2\right) =$$

$$= \frac{\alpha\pi}{8E\theta^3}\left(\frac{1+\theta/2\theta_m}{\sqrt{1+\theta/\theta_m}} + \frac{2-\theta/\theta_m}{\sqrt{1-\theta/\theta_m}} - 1\right) do. \qquad (2)$$

Pour la validité du résultat obtenu il suffit que chacun des termes de la somme dans (1) soit beaucoup inférieur à l'unité. L'estimation

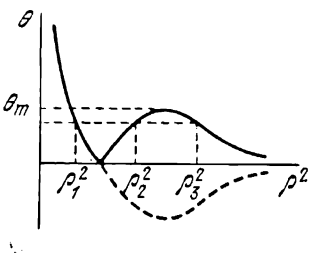


Fig. 107

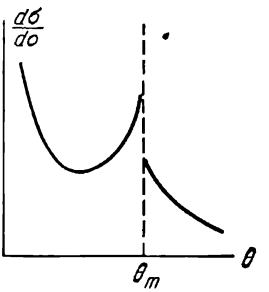


Fig. 108

montre que pour cela il suffit que soit remplie la condition $\theta \ll 1$. L'expression (2) a été obtenue pour $\theta < \theta_m$. Si $\theta_m \ll 1$, on a pour $\theta_m < \theta \ll 1$ la section

$$d\sigma = \pi|d\rho_1^2| = \frac{\alpha\pi}{8E\theta^3}\left(\frac{1+\theta/2\theta_m}{\sqrt{1+\theta/\theta_m}} - 1\right) do.$$

La dépendance de $\frac{d\sigma}{do}$ de θ est représentée sur la figure 108. Pour $\theta \to 0$ et pour $\theta \to \theta_m$ la section $\frac{d\sigma}{do}$ croît indéfiniment. La section de diffusion dans l'intervalle d'angles contigu à $\theta = 0$ est infinie, car la diffusion à petits angles correspond à un grand paramètre d'impact

*) Il es beaucoup plus simple de prendre les deux termes de la somme dans le problème 2 donné dans le § 20 de la référence [1].

La section de diffusion dans l'intervalle des angles $\theta_m - \delta < \theta < \theta_m$

$$\int_{\theta_m-\delta}^{\theta_m} 2\pi \frac{d\sigma}{do}\, \theta\, d\theta = \frac{\alpha\pi^2\delta^{1/2}}{2E\theta_m^{3/2}}$$

est finie et tend vers zéro quand $\delta \to 0$.

Quelle est la relation liant le nombre de particules ayant atteint le compteur à la dimension de ce dernier s'il est frappé sous l'angle θ_m?

3.9. La vitesse de la particule après diffusion, comparée à sa direction primitive, s'est avérée déviée de l'angle

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2/\rho^2}}, \quad a^2 = \frac{\alpha}{E} \tag{1}$$

Le compteur de particules diffusées enregistre avec les particules déviées de l'angle $|\theta| < \pi$ également les particules ayant au préa-

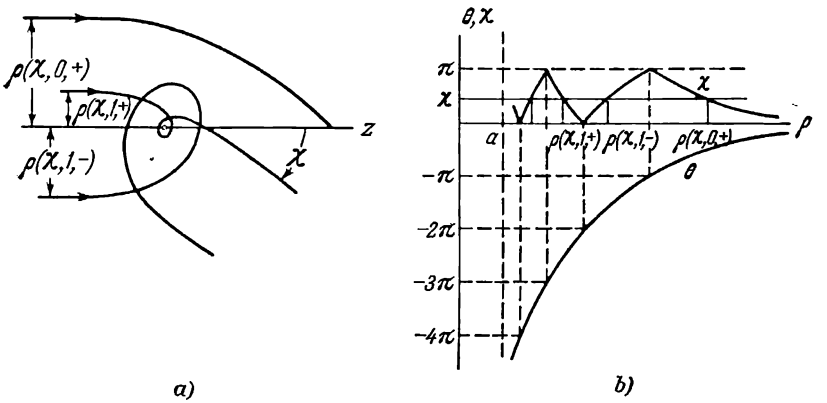


Fig. 109

lable effectué plusieurs révolutions autour du centre (fig. 109, *a*). L'angle de déviation observé χ se trouve dans les limites $0 < \chi < \pi$ et est relié à θ par la relation

$$-\theta = 2\pi l \pm \chi, \tag{2}$$

où au signe supérieur correspond $l = 0, 1, \ldots$, et au signe inférieur $l = 1, 2, \ldots$ (fig. 109, *b*). Il s'ensuit de (1) et de (2) que

$$\rho^2(\chi, l, \pm) = a^2 + \frac{\pi a^2}{2}\left(\frac{1}{2\pi l \pm \chi} - \frac{1}{2\pi l + 2\pi \pm \chi}\right).$$

La section est

$$d\sigma = \pi \sum_{l=0}^{\infty} |d\rho^2(\chi, l, +)| + \pi \sum_{l=1}^{\infty} |d\rho^2(\chi, l, -)|.$$

En tenant compte de ce que $\frac{d\rho^2(\chi, l, +)}{d\chi} < 0$, $\frac{d\rho^2(\chi, l, -)}{d\chi} > 0$, il vient

$$d\sigma = \pi d\left[-\sum_{l=0}^{\infty} \rho^2(\chi, l, +) + \sum_{l=1}^{\infty} \rho^2(\chi, l, -)\right] =$$

$$= \frac{\pi^2 a^2}{2} d\left(\frac{1}{2\pi - \chi} - \frac{1}{\chi}\right) = \frac{\pi a^2 (2\pi^2 - 2\pi\chi + \chi^2)}{2\chi^2 (2\pi - \chi)^2 \sin\chi} do.$$

La section $\frac{d\sigma}{do}$ devient infinie quand $\theta \to \pi$. Dans ce cas cela aboutit à ce que la section de diffusion sous un petit angle solide $\Delta o = \int_{\pi-\chi_0}^{\pi} 2\pi \sin\chi \, d\chi = \pi\chi_0^2$ vaut

$$\Delta\sigma = \frac{a^2}{2\pi} \int_{\pi-\chi_0}^{\pi} \frac{do}{\chi} = a^2\chi_0 = a^2 \sqrt{\frac{\Delta o}{\pi}}.$$

L'apparition de la singularité de la section différentielle est due au fait que l'angle de déviation égal à π est atteint pour des valeurs du paramètre d'impact $\rho(\pi, l, \pm)$ différentes de zéro. Dans l'angle solide Δo, qui est proportionnel au carré de la petite grandeur $\Delta\chi \equiv \chi_0$, se précipitent les particules ayant traversé avant la diffusion les éléments de surface $2\pi\rho\Delta\rho$ dont les aires sont proportionnelles au premier degré de $\Delta\rho \sim \chi_0$. Cette singularité de la diffusion est appelée *rayonnement* (voir [11], ch. 5, § 5).

Une singularité analogue s'observe aussi lors de la diffusion de l'angle $\chi = 0$, toutefois, dans ce cas, elle est masquée par une section infinie par suite de la diffusion des particules avec des paramètres d'impact aussi grands que l'on veut. Par exemple, le rayonnement dû à la diffusion en avant pourrait se manifester avec la limitation du diamètre du faisceau de particules incidentes frappant le centre.

3.10. a) La condition $E \gg V$ implique, comme on le voit aisément, un petit angle de déviation au cours de la diffusion. La variation de l'impulsion

$$\Delta p = -\frac{\partial}{\partial\rho} \int_{-\infty}^{\infty} U(|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t|)\, dt = \frac{2V\sqrt{\pi}}{v} x e^{-x^2},$$

où $x = \varkappa\rho$.

L'angle de déviation

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{V\sqrt{\pi}}{E} x e^{-x^2}. \qquad (1)$$

On n'est pas arrivé à résoudre cette équation en x sous une forme analytique. Toutefois, en utilisant le graphique de la fonction

xe^{-x^2} (fig. 110), on voit que pour $\theta < \theta_m = \frac{V}{E}\sqrt{\frac{\pi}{2e}}$ l'équation (1) présente deux racines.

En utilisant la relation

$$d\theta = \frac{V\sqrt{\pi}}{E}(1-2x^2)\,e^{-x^2}\,dx$$

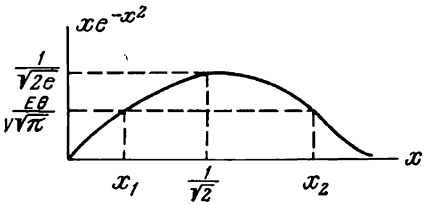


Fig. 110

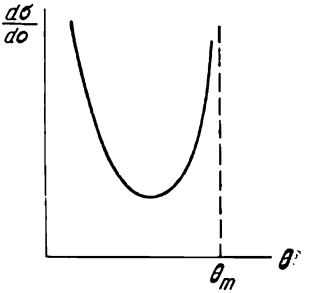


Fig. 111

et en tenant compte de (1), on peut représenter la section

$$d\sigma = \pi\,(|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2|) = \frac{2\pi}{\varkappa^2}\,(x_1\,dx_1 - x_2\,dx_2)$$

sous la forme

$$d\sigma = \frac{do}{\varkappa^2\theta^2}\left(\frac{x_2^2}{2x_2^2-1} + \frac{x_1^2}{1-2x_1^2}\right).$$

Pour $\theta \ll \theta_m$ il s'avère que $x_1 \ll 1$, $x_2 \gg 1$, et

$$d\sigma = \frac{do}{2\chi^2\theta^2}.$$

Pour $\theta_m - \theta \ll \theta_m$ il est possible de résoudre (1) en développant xe^{-x^2} en série près du maximum. Il vient

$$x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1-\theta/\theta_m}}{\sqrt{2}}, \quad d\sigma = \frac{do}{2\varkappa^2\theta_m^2\sqrt{1-\theta/\theta_m}}.$$

Le graphique $d\sigma/do$ est représenté sur la figure 111. La singularité pour $\theta = \theta_m$ est intégrable (comp. avec problème 3.8).

Y a-t-il une relation entre l'apparition de la singularité de la section pour $\theta = \theta_m$ et la méthode approchée de résolution du problème?

b) $d\sigma = \frac{do}{\varkappa^2\theta^2}\left(\frac{x_1+x_1^2}{1-2x_1} + \frac{x_2+x_2^2}{2x_2-1}\right),$

où

$$\frac{x_{1,2}}{(1+x_{1,2})^3}=\left(\frac{2E\theta}{\pi V}\right)^2.$$

Pour

$$\theta \ll \theta_m=\frac{\pi V}{3\sqrt{3}E}, \quad d\sigma=\frac{\pi V\,do}{4\varkappa^2 E\theta^3}$$

Pour $\theta_m-\theta \ll \theta_m$

$$d\sigma=\frac{\sqrt{3}\,do}{2\sqrt{2}\,\varkappa^2\theta_m^2\sqrt{1-\theta/\theta_m}}$$

3.11. a) Avec le choc la particule dont la vitesse était **v** acquiert la vitesse $\mathbf{v}'=\mathbf{v}-2\mathbf{n}(\mathbf{nv})$, où **n** est le vecteur unité de la normale à la surface de l'ellipsoïde. Après substitution de

$$\mathbf{v}=v(0,\ 0,\ 1), \quad \mathbf{n}=\frac{1}{N}\left(\frac{x}{a^2},\ \frac{y}{b^2},\ \frac{z}{c^2}\right)^{*)},$$

il vient

$$\mathbf{v}'=v\left(-\frac{2xz}{N^2a^2c^2},\ -\frac{2yz}{N^2b^2c^2},\ 1-\frac{2z^2}{N^2c^4}\right). \tag{1}$$

Introduisons les angles polaires déterminant la direction de $\mathbf{v}'$: $\mathbf{v}'=v(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$. En comparant avec (1), on obtient

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a^2y}{b^2x}, \quad \cos\theta=1-\frac{2z^2}{N^2c^4}, \quad \sin^2\theta=\left(\frac{2z}{N^2c^2}\right)^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right). \tag{2}$$

La section est

$$d\sigma=dx\,dy=\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(\theta,\ \varphi)}\right|d\theta\,d\varphi,$$

où la dépendance de x, y de θ, φ se détermine à partir de (2) et de l'équation de l'ellipsoïde. Pour le calcul du jacobien il s'avère commode d'introduire une variable intermédiaire u telle que

$$x=a^2u\cos\varphi, \quad y=b^2u\sin\varphi.$$

De (2) on obtient

$$\sin\theta=\frac{2zu}{N^2c^2}, \quad 1-\cos\theta=\frac{2z^2}{N^2c^4}, \quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{z}{uc^2},$$

tandis que de l'équation de l'ellipsoïde il vient

$$u^{-2}=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+c^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}.$$

---

*) Comme il est connu de la géométrie différentielle,

$$\mathbf{n}\sim\operatorname{grad}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c_2}-1\right),$$

N se déterminant par la condition $\mathbf{n}^2=1$.

Ensuite

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, \varphi)} \frac{\partial(u, \varphi)}{\partial(\theta, \varphi)} = \frac{a^2b^2}{2} \frac{\partial u^2}{\partial\theta}.$$

Et en définitive

$$d\sigma = \frac{a^2b^2c^2\, do}{4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

A l'aide de quelle transition limite peut-on obtenir de ce résultat la section de diffusion sur un paraboloïde?

b) $d\sigma = \dfrac{a^2b^2c^2\, do}{\cos^3\theta\,(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2\operatorname{tg}^2\theta)^2}$;

c) $d\sigma = \dfrac{\cos\theta a^2b^2c^2\, do}{\sin^4\theta\,(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + c^2\operatorname{cotg}^2\theta)^2}$.

3.12. a) La variation de l'impulsion avec la diffusion est

$$\Delta\mathbf{p} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial\mathbf{r}}\, dt. \tag{1}$$

Avec la diffusion à petits angles, dans le second membre de (1) on peut porter $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t$, où $\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{v}$:

$$\Delta\mathbf{p} = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t)\, dt = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\rho}} \frac{\mathbf{a}\rho\pi}{v\rho}\ ^{*)}. \tag{2}$$

Supposons que l'axe z est parallèle à $\mathbf{v}$, tandis que l'axe y est perpendiculaire à $\mathbf{a}$. Alors

$$\Delta p_x = -\frac{\pi a_x}{v}\frac{\rho_y^2}{\rho^3}, \qquad \Delta p_y = \frac{\pi a_x}{v}\frac{\rho_x\rho_y}{\rho^3}. \tag{3}$$

La direction de la vitesse après diffusion sera caractérisée par des angles dans le système de coordonnées sphériques

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta p_y}{\Delta p_x}, \qquad \theta = \frac{\Delta p}{p}. \tag{4}$$

Il s'ensuit de (3) de façon évidente que la diffusion s'effectue dans l'intervalle des angles

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

---

*) Le remplacement dans (2) de la dérivation par rapport à $\mathbf{r}$ par la dérivation par rapport à $\boldsymbol{\rho}$ (à condition que $\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{v}_\infty$) implique que la formule obtenue ne détermine que les composantes de $\Delta\mathbf{p}$ perpendiculaires à $\mathbf{v}_\infty$.

De (3) et (4) on obtient

$$\rho_x = \pm \frac{\pi a_x}{2E} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\theta}, \quad \rho_y = \mp \frac{\pi a_x}{2E} \frac{\cos^2\varphi}{\theta}. \tag{5}$$

La section est alors

$$d\sigma = \sum d\rho_x\, d\rho_y = \sum \left| \frac{\partial(\rho_x, \rho_y)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| d\theta\, d\varphi = \left(\frac{\pi a_x}{E}\right)^2 \frac{\cos^2\varphi}{2\theta^4}\, do. \tag{6}$$

(La sommation dans (6) est réalisée suivant deux valeurs possibles de ρ d'après (5).)

b) $d\sigma = \frac{|\mathbf{a}_\perp|\, do}{2E\theta^3}$, $\mathbf{a}_\perp$ étant la composante de $\mathbf{a}$ perpendiculaire à $\mathbf{v}_\infty$. La section s'avère symétrique par rapport à $\mathbf{v}_\infty$ (bien que le champ ne soit, toutefois, nullement symétrique par rapport à cette direction).

3.13. La variation de l'angle de déviation de la particule (comp. avec problème 2.17) est :

$$\delta\theta(\rho) = -\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial\rho} \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\delta U(r)\, dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}}}. \tag{1}$$

De l'équation $\theta = \theta_0(\rho) + \delta\theta(\rho)$, on tire

$$\rho = \rho_0(\theta) - \delta\theta(\rho_0(\theta)) \frac{d\rho_0(\theta)}{d\theta}$$

(comp. avec problème 1.8). La dépendance $\theta_0(\rho)$, conformément à $\rho_0(\theta)$, se détermine ici pour $\delta U(r) = 0$. D'où la section

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \pi \left| \frac{d\rho^2}{d\theta} \right| = \pi \left| \frac{d\rho_0^2(\theta)}{d(\theta)} - \frac{d}{d\theta} 2\rho_0(\theta)\, \delta\theta(\rho_0(\theta)) \frac{d\rho_0(\theta)}{d\theta} \right| =$$

$$= \frac{d\sigma_0}{d\theta} \mp \frac{d}{d\theta}\left[\delta\theta(\rho_0(\theta)) \frac{d\sigma_0}{d\theta}\right].$$

Le signe devant $d/d\theta$ est opposé à celui se trouvant devant $d\rho_0(\theta)/d\theta$.

a) $\delta \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi\beta}{E} \frac{d}{d\theta} \frac{\pi - \theta + 2\cos\theta/2}{\sin\theta}$;

b) $\delta \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{2\gamma}{\pi^3 \sqrt{\beta E}} \frac{d}{d\theta} \frac{(\pi - \theta)^2}{\sqrt{\theta(2\pi - \theta)}}$.

3.14. L'énergie acquise par la particule

$$\varepsilon = \frac{(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \approx \mathbf{v}\Delta\mathbf{p}$$

ne se détermine en premier ordre qu'au moyen de la variation de la composante longitudinale de l'impulsion. Vu que la déviation de la particule peut être considérée comme petite dans l'expression de la

force

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r, t)}{\partial \mathbf{r}},$$

agissant sur la particule, on peut poser (après dérivation) $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}(t - \tau)$. $\boldsymbol{\rho}$ est ici le paramètre d'impact, tandis que τ est l'instant auquel la particule est située à la distance minimale du centre. Alors

$$\varepsilon = \mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t)\, dt = \varepsilon_m e^{-\varkappa^2\rho^2} \cos\varphi,$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\pi}\, V_2 \frac{\omega}{\varkappa v} e^{-\frac{\omega^2}{4\varkappa^2 v^2}}, \quad \varphi = \omega\tau,$$

quant à la section de diffusion des particules à τ donné pour $\cos\varphi > 0$ ($\cos\varphi < 0$), elle devient

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\varkappa^2|\varepsilon|} & \text{pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_m \cos\varphi \ (0 > \varepsilon > \varepsilon_m \cos\varphi), \\ 0 & \text{pour } |\varepsilon| > \varepsilon_m |\cos\varphi|. \end{cases}$$

Dans le faisceau incident il se trouve des particules à τ variées. Prenons la moyenne sur la phase φ (par exemple, pour $\varepsilon > 0$ d'après la formule

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varphi, \quad \alpha = \arccos\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}\Big),$$

et il vient

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{\varkappa^2|\varepsilon|} \arccos\dfrac{|\varepsilon|}{\varepsilon_m} & \text{pour } |\varepsilon| < \varepsilon_m, \\ 0 & \text{pour } |\varepsilon| > \varepsilon_m. \end{cases}$$

3.15. $$\frac{dN}{N} = \frac{\lambda^2 \sin\theta\, d\theta}{\cos^3\theta \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{tg}^2\theta}}, \quad \lambda = \frac{V^2 - v_0^2}{2Vv_0},$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg} \lambda^{-1}, \text{ si } V < v_0,$$

$$(\pi - \operatorname{arctg} |\lambda|^{-1}) \leqslant \theta \leqslant \pi \text{ si } V < v_0.$$

3.16. $$\frac{dN}{N} = \frac{6(T_{\max} - T)(T - T_{\min})}{(T_{\max} - T_{\min})^3} dT, \quad T_{\min} \leqslant T \leqslant T_{\max},$$

$$T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2, \quad T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2.$$

3.17. $$\operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{cotg}\theta_2 = \frac{\alpha}{E\rho}, \quad E = \frac{mv^2}{2},$$

$$v_1 = \frac{E\rho v}{\sqrt{\alpha^2 + E^2\rho^2}}, \quad v_2 = \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha^2 + E^2\rho^2}}.$$

3.18. $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ pour $m_1 < m_2$,

$\theta = \frac{\pi}{2}$ pour $m_1 = m_2$;

$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ pour $m_1 > m_2$.

3.19. Dans le système de centre des masses après collision la résultante de vitesse normale à la surface des sphères au point de contact devient nulle, tandis que la vitesse tangentielle v_0' se conserve (fig. 112). La section de diffusion exprimée en fonction de l'angle χ de déviation de a particule dans le système de centre des masses est de la forme

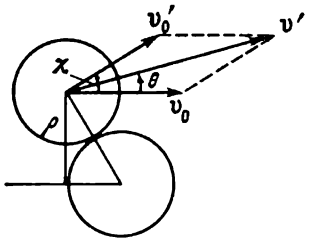


Fig. 112

$$d\sigma = \pi \mid d\rho^2 \mid = 4a^2\pi \mid d\cos^2\chi \mid = = 4a^2 \cos\chi \, do.$$

Pour passer au système de laboratoire, de l'égalité

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0' \sin\chi}{v_0' \cos\chi + v_0} = \frac{\sin\chi\cos\chi}{1+\cos^2\chi}$$

on tire

$$\cos^2\chi_{1,2} = \frac{3}{2}\cos^2\theta - 1 \pm \pm \frac{1}{2}\cos\theta\sqrt{9\cos^2\theta - 8}.$$

Compte tenu des deux liaisons possibles de χ avec θ, on obtient

$$d\sigma = 4\pi a^2 (|d\cos^2\chi_1| + |d\cos^2\chi_2|) = 4\pi a^2 d(\cos^2\chi_2 - \cos^2\chi_1) = = 4a^2 \frac{5 - 9\sin^2\theta}{\sqrt{1 - 9\sin^2\theta}} \, do,$$

avec $0 < \theta < \arcsin\frac{1}{3}$.

Si les sphères incidentes sont identiques aux sphères demeurant initialement au repos, et il n'y a pas de raison de les distinguer après diffusion, on doit alors ajouter à la section obtenue la section de fuite des sphères initialement au repos dans l'angle solide do:

$$d\sigma' = 4a^2 \cos\theta \, do \quad (0 < \theta < \pi/2).$$

3.20. $I(x) = I(0)\, e^{-n\sigma x}$.

3.21. $dN = \sigma n_1 n_2 \mid \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \mid dV\, dt$.

3.22.

a) $F_{tr} = 2\pi m v^2 n \int_0^\pi f(\theta)(1 - \cos\theta)\sin\theta\, d\theta$ *);

*) La grandeur $\int \frac{d\sigma}{do}(1 - \cos\theta)\, do$ est appelée section de transport (pour la distinguer de la section totale $\int \frac{d\sigma}{do} do$).

b) $\langle\Theta^2\rangle = 2\pi\left(\frac{m}{M}\right)^2 nl \int\limits_0^\pi f(\theta)\sin^3\theta\, d\theta$;

l est ici le trajet accompli par la particule de masse M, v sa vitesse et n la concentration de particules légères.

§ 4. Équations de mouvement. Lois de conservation

4.1. En posant $x = 0$ pour $t = 0$, on obtient $C = 0$, tandis qu'à partir de $x = a$ pour $t = \tau$, il vient $B = \frac{a}{\tau} - A\tau$. Sur la base de la fonction $x(t) = At^2 + \left(\frac{a}{\tau} - A\tau\right) t$ on calcule l'action

$$S = \int\limits_0^\tau L(x, \dot{x})\, dt = \int\limits_0^\tau \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + Fx\right) dt =$$

$$= \frac{mA^2\tau^3}{6} + \frac{ma^2}{2\tau} - \frac{FA\tau^3}{6} + \frac{Fa\tau}{2}.$$

De la condition $\frac{\partial S}{\partial A} = 0$ définissant le minimum de l'action on tire $A = \frac{F}{2m}$. Il est évident que la loi du mouvement

$$x(t) = \frac{Ft^2}{2m} + \left(\frac{a}{\tau} - \frac{F\tau}{2m}\right) t$$

s'avère, dans le cas considéré, précise. Toutefois, la solution donnée du problème ne permet que d'affirmer que cette loi est, dans un certain sens, la meilleure de toutes les lois pensables de la forme proposée.

Pour se convaincre que la loi de mouvement trouvée fournit une valeur de S plus petite que celle obtenue avec toute autre loi quelconque $x(t)$, c'est-à-dire qu'elle est vraie, il faut s'assurer qu'elle vérifie l'équation de Lagrange.

4.2. $$x(t) = \begin{cases} v_x t - a & \text{pour } 0 < t < t_0, \\ \sqrt{v_x^2 - 2U/m}\,(t - \tau) + a & \text{pour } t_0 < t < \tau, \end{cases}$$

$$y(t) = at/\tau,$$

où $v_x = (2aU/m\tau)^{1/3}$, $t_0 = a/v_x$.

4.3. En partant de la relation

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) = L\left(q, \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}, t\right),$$

on obtient

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q},$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}.$$

Compte tenu de ce que $\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q}$, il vient

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right). \tag{1}$$

Donc de la validité de l'équation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ s'ensuit la validité de l'équation analogue

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q} = 0.$$

Au cas de plusieurs degrés de liberté, au lieu de (1) on obtient

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_i} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k}\right).$$

4.4. $\widetilde{L}\left(Q, \frac{dQ}{d\tau}, \tau\right) = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right)\frac{dt}{d\tau}$.

Dans ce cas

$$q = q(Q, \tau), \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\tau}\frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{dQ}{d\tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial Q}\frac{dQ}{d\tau} + \frac{dt}{d\tau}.$$

4.5. $\widetilde{L} = \frac{m}{2}\frac{\dot{x}^2}{1+\lambda\dot{x}} - (1+\lambda\dot{x})\,U(x), \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$.

4.6. $\widetilde{L} = -\sqrt{1-\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2}$.

Le problème proposé est tout formel. Cependant la fonction de Lagrange donnée, tout comme la transformation étudiée (« modifiées » par introduction de facteurs de dimension) ont une signification physique fort simple en théorie de la relativité (voir [3], § 4, 8).

4.7. Pour $P_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_l}$, $E' = \sum_l P_l \dot{Q}_l - L$ on trouve

$$P_l = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial Q_l} p_k, \quad E' = E - \sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial t}.$$

4.8. En se servant des formules du problème précédent, il vient

a) $p'_r = m\dot{r}' = p_r, \quad p'_\varphi = mr'^2(\dot{\varphi}' + \Omega) = p_\varphi, \quad E' = E - \Omega p_\varphi;$

b)
$$\left.\begin{aligned} p'_x &= p_x \cos \Omega t - p_y \sin \Omega t, \\ p'_y &= p_x \sin \Omega t + p_y \cos \Omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Il s'ensuit de (1) que $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$, tandis que les égalités mêmes traduisent la loi de transformation des composantes du vecteur avec le passage au système de coordonnées ayant pivoté de l'angle Ωt. Soulignons que $\mathbf{p}' \neq m\mathbf{v}'$ (comp. avec [1], § 39).

4.9. a) $E' = E - \mathbf{V}\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p};$

b) $E' = E - \mathbf{V}\mathbf{p} + \dfrac{mV^2}{2}, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\mathbf{V}.$

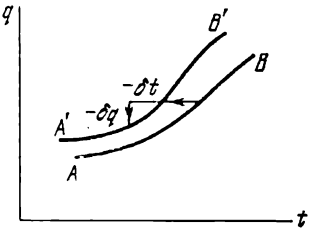


Fig. 113

Ce sont deux expressions de l'énergie différant d'une constante. Habituellement, on se sert de la seconde expression, car elle correspond justement à la définition de l'énergie selon la théorie de la relativité.

4.10. Admettons que $q_i = f_i(t)$ décrit le mouvement du système (trajectoire AB sur fig. 113). Etant donné que la forme de l'action ne varie pas avec le passage aux variables q'_i, t', les égalités $q'_i = f_i(t')$ décrivent également le mouvement réel du système. Exprimées en fonction des variables q_i, t à la précision du premier degré en ε près, ces égalités prennent la forme

$$q_i(t - \delta t) = f_i(t) - \delta q_i,$$

où

$$\delta q_i = \varepsilon \Psi_i(f(t)\, t), \quad \delta t = \varepsilon X(f(t), t)$$

(trajectoire $A'B'$ sur fig. 113).

Des petites variations de coordonnées et du temps du début et de la fin du mouvement, lors du passage de la trajectoire AB à la trajectoire $A'B'$, impliquent un changement de l'action:

$$S_{A'B'} - S_{AB} = \left[\frac{\partial S}{\partial t}(-\delta t) + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}(-\delta q_i)\right]_A^B.$$

Ici (voir [1], § 43)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = -E(t),$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(t).$$

D'autre part, selon la condition du problème, $S_{AB} = S_{A'B'}$, de sorte que

$$E(t_A)\,\varepsilon X(q_A, t_A) - \sum_i p_i(t_A)\,\varepsilon\Psi_i(q_A, t_A) =$$
$$= E(t_B)\,\varepsilon X(q_B, t_B) - \sum_i p_i(t_B)\,\varepsilon\Psi_i(q_B, t_B),$$

ou

$$EX - \sum p_i\Psi_i = \text{const}.$$

Le théorème démontré est en fait l'unique conclusion de différentes lois de conservation. Son importance grandit en relation avec l'existence d'un théorème analogue relevant du domaine de la théorie du champ (théorème de Neter, voir [12, 13]).

4.11. $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_i X - \Psi_i) - LX - f = \text{const}.$

4.12. a) Impulsion;
b) moment cinétique;
c) énergie;
d) $M_z + \frac{h}{2\pi} p_z = \text{const}$, h est le pas de l'hélice;

e) $Ex - p_x t = \text{const}$ qui est l'intégrale de mouvement du centre d'inertie du système (voir [2], § 14).

4.13. a) L'énergie potentielle $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{Fr}$ et avec elle l'action ne varient pas au cours des décrochements dans la direction perpendiculaire à **F** ainsi que dans les rotations autour de l'axe parallèle à **F**. Aussi les intégrales de mouvement sont-elles les composantes de l'impulsion perpendiculaires à **F** et la composante du moment cinétique parallèle à **F**. Comme la fonction de Lagrange est indépendante du temps, l'intégrale de mouvement est l'énergie.

L'affirmation que les différents points d'un certain domaine sont « équivalents » signifie qu'en tous ces points les valeurs de l'énergie potentielle (et non de la force !) sont les mêmes.

b) La transformation de similitude $\mathbf{r}' = \alpha\mathbf{r}$ peut conserver la forme de l'action si, en même temps, se transforme le temps $t' = \beta t$. L'apport à l'action de l'énergie cinétique

$$\int \frac{mv'^2}{2}\,dt' = \frac{\alpha^2}{\beta}\int \frac{mv^2}{2}\,dt$$

ne varie pas pour $\beta = \alpha^2$, tandis que l'apport de l'énergie potentielle $-\int U(\mathbf{r}')\,dt' = -\alpha^n\beta\int U(\mathbf{r})\,dt = -\alpha^{n+2}\int U(\mathbf{r})\,dt$ pour $n = -2$.

Pour profiter du théorème formulé dans le problème 4.10, écrivons la transformation de similitude infiniment petite en posant $\alpha = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$:

$$\mathbf{r}' = (1 + \varepsilon)\,\mathbf{r}, \quad t' = (1 + 2\varepsilon)\,t,$$

de sorte que $\Psi = \mathbf{r}$, $X = 2t$, et l'intégrale du mouvement devient

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{v}X - \Psi) - LX = m\mathbf{v}\mathbf{r} - 2Et = C. \tag{1}$$

De (1) il est possible de tirer $r(t)$, compte tenu de ce que $\mathbf{r}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}$:

$$r^2 = \frac{2E}{m}t^2 + Ct + C_1.$$

Si $E < 0$, la particule chute au centre (avec $\dot{r} \to \infty$). Si $E > 0$, il est commode d'introduire à la place de C, C_1 d'autres constantes τ, B et d'écrire (2) sous la forme

$$r^2 = \frac{2E}{m}(t - \tau)^2 + B.$$

Au cas où $B > 0$ la dépendance $r(t)$ demeure la même que pour le mouvement de la particule à la vitesse $v_0 = \sqrt{2E/m}$ et un paramètre d'impact $\rho = \sqrt{B}$. Pour $B < 0$ la particule chute au centre.

Les champs pour lesquels la condition de ce problème est satisfaite sont introduits, par exemple, dans les problèmes 12.6, 12.7, voir aussi [1, problème donné au § 15].

c) $E - \mathbf{V}\mathbf{p} = \text{const}$;

d) $\mathbf{r}\mathbf{p} - 2Et = \text{const}$, où $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, si $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{r})$;

e) $E - p_\varphi \Omega = \text{const}$.

4.14. $m\mathbf{r} - \mathbf{p}t = \text{const}$ (comp. avec problème 4.12e).

Cette intégrale de mouvement constitue-t-elle la huitième intégrale indépendante du système fermé (outre E, $\mathbf{M}$, $\mathbf{p}$)?

4.15. a) Soit l'axe z parallèle à $\mathcal{H}$. Le déplacement le long de l'axe z et la rotation autour de ce dernier ne modifient pas l'aspect de $\mathbf{A}$ et, partant, la forme de l'action. Aussi les intégrales de mouvement sont-elles

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \text{et} \quad M_z = xp_y - yp_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{e\mathcal{H}}{2c}(x^2 + y^2).$$

En outre, une intégrale de mouvement est également l'énergie $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.

b) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, $p'_y = m\dot{y} + \frac{e}{c}\mathcal{H}x$,

$p'_z = m\dot{z}$ (comp. avec le problème 10.7).

Les considérations de symétrie permettent de déterminer les différentes intégrales de mouvement suivant le choix du potentiel vecteur pour le champ donné $\mathfrak{H}$. Mais toutes les grandeurs : E, $p_z = p'_z$, M_z, p'_y sont des intégrales de mouvement, quel que soit A.

4.16. a) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, $M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{e\mathbf{m}}{c\sqrt{x^2+y^2}}$

(l'axe z est ici choisi parallèle au vecteur $\mathbf{m}$). (Comp. avec le problème 2.31.)

b) Des propriétés de symétrie du champ donné on peut déduire les intégrales de mouvement suivantes :

$$p_z = m\dot{z}, \quad M_z \equiv p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + \frac{e\mu}{c}, \quad E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Toutefois le mouvement dans ce « champ » est un mouvement libre. En effet, la fonction de Lagrange

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e\mu}{c}\dot{\varphi}$$

ne diffère de la fonction de Lagrange d'une particule libre que d'une dérivée totale en temps de la fonction $\frac{e\mu\varphi}{c}$ (il va de soi que dans ce cas $\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$).

Notons que dans ce cas, quand μ est une fonction temporelle, p_z et M_z restent des intégrales de mouvement.

4.17. a) $\ddot{x} + x = 0$. Une équation identique peut être obtenue de la fonction de Lagrange $L_1(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2$. Comme il est connu, si deux fonctions de Lagrange ne diffèrent que de la dérivée totale de la fonction des coordonnées et du temps, elles aboutissent à des équations identiques. La réciproque est toutefois fausse.

b) $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$.

4.18. a) Les équations de Lagrange pour une particule dans le champ U en coordonnées sphériques

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2) + \frac{\partial U}{\partial r} = 0,$$

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0,$$

$$m(r^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

se ramènent facilement à la forme

$$m(\dot{\mathbf{v}})_i = (\mathbf{F})_i,$$

où les composantes de la force sont celles de — grad U:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

D'où

$$(\dot{\mathbf{v}})_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta - r\dot{\theta}^2,$$

$$(\dot{\mathbf{v}})_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \cos\theta \sin\theta,$$

$$(\dot{\mathbf{v}})_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta.$$

b) $$(\dot{\mathbf{v}})_i = \frac{1}{2h_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}\right)\frac{ds^2}{dt^2} =$$

$$= h_i\ddot{q}_i + \sum_{k=1}^{3}\left(2\dot{q}_i\dot{q}_k\frac{\partial h_i}{\partial q_k} - \dot{q}_k^2\frac{h_k}{h_i}\frac{\partial h_k}{\partial q_i}\right).$$

4.19. a) La fonction de Lagrange

$$L = \frac{m}{2}\sum_{i,\,k=1}^{3} g_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q_1, q_2, q_3),$$

où

$$g_{ik} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial x_l}{\partial q_i}\frac{\partial x_l}{\partial q_k} \quad (x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ x_3 \equiv z),$$

se ramène aux équations

$$m\sum_{k=1}^{3} g_{sk}\ddot{q}_k + m\sum_{k,\,l=1}^{3}\Gamma_{s,kl}\dot{q}_k\dot{q}_l = -\frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, 3), \tag{1}$$

où

$$\Gamma_{s,\,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial q_l} + \frac{\partial g_{ls}}{\partial q_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_s}\right).$$

b) En introduisant la notation $q_4(x, t) = t$, on peut conserver tous les calculs ainsi que les formules du point précédent ne remplaçant que $\sum_1^3$ par $\sum_1^4$.

Quelle est la signification dans les équations (1) des termes contenant $\Gamma_{1,\,k4}$ ($k = 1, 2, 3, 4$), si q_l sont des coordonnées cartésiennes dans le système de référence en rotation (voir problème 4.8)?

4.20. Vu que la fonction de Lagrange proposée ne diffère que du terme $L_1 = -\frac{eg}{c}\dot{\varphi}\cos\theta$ de la fonction de Lagrange d'une particule

libre, les composantes de la force en coordonnées sphériques (voir problème 4.18a) prennent la forme

$$F_r = 0,$$

$$F_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial L_1}{\partial \theta} = \frac{eg\,\dot{\varphi}\sin\theta}{cr},$$

$$F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{eg\dot{\theta}}{cr}$$

et, en fait, correspondent aux composantes de la force de Lorentz

$$\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}] = \frac{eg}{cr^3}[\mathbf{vr}].$$

Puisque $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, l'intégrale de mouvement est alors l'énergie $E = \frac{mv^2}{2}$.

Voyons comment apparaît l'intégrale de mouvement

$$\mathbf{J} = m[\mathbf{rv}] - \frac{eg}{c}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

La fonction de Lagrange ne varie pas dans les rotations autour de l'axe z, et, par suite, l'intégrale de mouvement devient

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta - \frac{eg}{c}\cos\theta = J_z.$$

Quant aux autres pivotements du système, ils impliquent une modification de la fonction de Lagrange d'une dérivée totale de la fonction de coordonnées par rapport au temps qu'on peut négliger *). Donc la projection $J_{z'}$ sur tout autre axe est également une intégrale de mouvement et, par suite, le vecteur $\mathbf{J}$ l'est aussi.

L'action correspondant à cette fonction de Lagrange ne se modifie pas dans une transformation de similitude. Donc l'intégrale de mouvement est

$$p_r r - 2Et = m\dot{r}r - 2Et$$

(comp. avec problème 4.13b).

4.21. Les équations de mouvement sont:

$$-\mathcal{L}\dot{I} = \varphi_A - \varphi_B, \quad \frac{q_2}{C} = \varphi_B - \varphi_A.$$

Supposons que la source de tension soit un condensateur de très grande capacité C_0 et que sa charge à l'instant où $q_1 = 0$ soit Q.

*) Par exemple, dans la rotation autour de l'axe x d'un petit angle $\delta\alpha$, il s'ajoute à $L \cdot \delta L = \delta\alpha \frac{eg}{c}\frac{d}{dt}(\operatorname{cotg}\theta\cos\varphi)$.

L'énergie du système, source et inductance comprises, est égale à $E_0 = \frac{(Q+q_1)^2}{2C_0} + \frac{\mathcal{L}}{2}\dot{q}_1^2$. En déplaçant l'origine de lecture de l'énergie et en passant à la limite $C_0 \to \infty$, Q/C_0 étant égal à U, on obtient

$$E = E_0 - \frac{Q^2}{2C_0} = Uq_1 + \frac{\mathcal{L}\dot{q}_1^2}{2}.$$

C'est justement à cette valeur de l'énergie que conduit la fonction de Lagrange proposée.

De façon analogue, l'énergie de la particule m dans un champ uniforme d'intensité $-F(t)$ est $\frac{m\dot{x}^2}{2} + Fx$.

On peut aboutir à la même fonction de Lagrange en partant de la fonction de Lagrange d'un champ électromagnétique et de l'interaction du champ avec les charges (voir [3], §§ 27, 28):

$$L = \frac{1}{8\pi}\int (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2)\, dV + \frac{1}{c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV - \int \varphi\rho\, dV \qquad (1)$$

(dans le système d'unités de Gauss).

En général, un champ électromagnétique est un système à un nombre infini de degrés de liberté. Mais le champ dans un condensateur ou dans un solénoïde se définit par la charge q_2 et le courant $\dot{q}_1$. En utilisant les équations

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathcal{H} = 4\pi\mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\,\mathcal{E} = 4\pi\rho$$

(et compte tenu de ce que le champ se concerne en un volume limité), on obtient

$$\int \varphi\rho\, dV = \frac{1}{4\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathcal{E}\, dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{div}\,(\varphi\mathcal{E})\, dV - \frac{1}{4\pi}\int \mathcal{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi\, dV = \frac{1}{4\pi}\int \mathscr{E}^2\, dV,$$

et de façon analogue

$$\frac{1}{c}\int \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV = \frac{1}{4\pi}\int \mathscr{H}^2\, dV,$$

de sorte que

$$L = \frac{1}{8\pi}\int (\mathscr{H}^2 - \mathscr{E}^2)\, dV.$$

La fonction de Lagrange peut donc être exprimée au moyen des énergies du champ électrique du condensateur $\frac{1}{8\pi}\int \mathscr{E}^2\, dV = \frac{q_2^2}{2C}$ et du champ magnétique de l'inductance $\frac{1}{8\pi}\int \mathscr{H}^2\, dV = \frac{1}{2}\mathcal{L}\dot{q}_1^2$ (voir [3], § 2, 32).

En présence d'un champ extérieur $\mathcal{H}_e$ créé par le courant $\mathbf{j}_e$, il faut remplacer dans (1) $\mathcal{H}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{j}$ par $\mathcal{H} + \mathcal{H}_e$, $\mathbf{A} + \mathbf{A}_e$, $\mathbf{j} + \mathbf{j}_e$. Le complément à la fonction de Lagrange (1), compte tenu de l'équation $c \operatorname{rot} \mathcal{H}_e = 4\pi \mathbf{j}_e$, se ramène facilement à la forme

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathcal{H}_e^2 \, dV + \frac{1}{c} \int \mathbf{A}_e \mathbf{j} \, dV.$$

En rejetant les termes ne dépendant que du champ extérieur et compte tenu de ce que pour un fil mince $\mathbf{j}\, dV = \dot{q}_1 \, d\mathbf{l}$, où $d\mathbf{l}$ est l'élément de longueur du fil, il vient

$$\frac{1}{c} \int \mathbf{A}_e \mathbf{j} \, dV = \frac{\dot{q}_1}{c} \int \mathbf{A}_e \, d\mathbf{l} = \frac{\dot{q}_1}{c} \int \operatorname{rot} \mathbf{A}_e \, d\mathbf{S} = \frac{\dot{q}_1}{c} \int \mathcal{H}_e \, d\mathbf{S}.$$

En présence d'un champ électrique extérieur $\mathcal{E}_e$ (ou de champs complémentaires), il vient

$$-\int \varphi_e \rho \, dV = -\sum_a q_a \varphi_{ae}$$

(q_a et φ_{ae} sont la charge et le potentiel du champ extérieur de l'a-ième conducteur).

A la variation de $q_{1,2}$ correspond donc une variation arbitraire des charges et des courants qu'accompagne une variation déterminée des potentiels. Il est aisé de se convaincre que dans cette variation doit se vérifier le principe de moindre action.

4.22. a) $L = \frac{\mathcal{L}\dot{q}_1^2}{2} - \frac{q_2^2}{2C} + U(q_2 - q_1)$;

b) $L = \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C}$;

c) $L = \frac{1}{2}\mathcal{L}_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_2\dot{q}_2^2 - \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_2^2}{2C_2} - \frac{(q_1+q_2)^2}{2C}$.

4.23. a) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} + mgl\cos\varphi - \frac{q^2}{2C(\varphi)}$;

b) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}(x)\dot{q}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + mgx - \frac{q^2}{2C}$.

4.24. Soit φ l'angle de rotation du cadre autour de l'axe AB relevé de la direction du champ magnétique, $\dot{q}$ le courant circulant dans le cadre (le sens positif étant celui de A vers D). La fonction de Lagrange du système est

$$L = \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}\dot{q}^2 + \mathcal{H}a^2\dot{q}\sin\varphi.$$

Les intégrales de mouvement sont l'énergie

$$E = \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}\dot{q}^2 \tag{1}$$

et l'impulsion conjuguée à la coordonnée cyclique q et ayant la signification de flux magnétique total à travers le cadre

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mathcal{L}\dot{q} + \mathcal{H}a^2 \sin\varphi = \Phi_0.$$

Le courant dans le cadre se détermine donc de façon univoque par la position de ce dernier

$$\dot{q} = (\Phi_0 - \mathcal{H}\, a^2 \sin\varphi)/\mathcal{L}.$$

En reportant cette valeur de $\dot{q}$ dans (1), il vient

$$E = \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi}^2 + U_{\text{eff}}(\varphi), \quad U_{\text{eff}}(\varphi) = (\Phi_0 - \mathcal{H}a^2 \sin\varphi)^2/2\mathcal{L}. \tag{2}$$

Le problème du mouvement du système se ramène donc au problème à une dimension.

Voyons en détail le cas où $0 < \Phi_0 < \mathcal{H}a^2$. La figure 114 fournit le graphique de $U_{\text{eff}}(\varphi)$ pour ce cas. On y voit que pour $E > U_{\max} =$

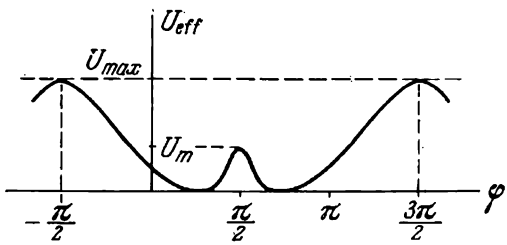


Fig. 114

$= (\Phi_0 + \mathcal{H}a^2)^2/2\mathcal{L}$, le mouvement du cadre est une rotation, $\dot{\varphi}$ étant une fonction périodique du temps de période

$$T = \sqrt{2ma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(\varphi)}}.$$

Pour $U_{\max} > E > (\Phi_0 - \mathcal{H}a^2)^2/2\mathcal{L} = U_m$ le cadre est soumis à des oscillations périodiques dans l'intervalle des angles $\varphi_1 < \varphi < \pi - \varphi_1$, où $\varphi_1 = \arcsin \frac{\Phi_0 - \sqrt{2\mathcal{L}E}}{\mathcal{H}a^2}$, en outre pour $E \to U_{\max}$ la période du mouvement s'accroît jusqu'à l'infini (voir problème 1.5). Pour $0 < E < U_m$ les oscillations sont possibles soit dans

l'intervalle $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, soit dans l'intervalle $\pi - \varphi_2 < \varphi < \pi - \varphi_1$, avec

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{\Phi_0 + \sqrt{2\mathscr{L}E}}{\mathscr{H}a^2}.$$

Comment se modifiera, relativement au mouvement qu'on vient de décrire, la nature du mouvement du cadre au cas où ce dernier offre une faible résistance?

4.25. a) Les équations de mouvement du système peuvent être obtenues en partant de la fonction de Lagrange avec un complément tenant compte de la liaison (voir [4], § 2.4)

$$L^* = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgy + \lambda(z - ax^2),$$

où λ est le facteur de Lagrange dépendant du temps. Les équations de mouvement

$$m\ddot{x} = -2\lambda ax, \tag{1}$$

$$m\ddot{z} - mg = \lambda \tag{2}$$

avec l'équation de liaison $z = ax^2$ déterminent complètement le mouvement de la particule. Dans les seconds membres des équations (1) et (2) figurent les composantes de la force de réaction suivant l'équation de liaison, il est facile de les exprimer en fonction de la coordonnée et de la vitesse de la particule:

$$R_x = -2axR_z, \quad R_z = \frac{(2a\dot{x}^2 - mg)\,m}{m + 4a^2x^2}.$$

b) $$\begin{cases} m\ddot{r} - mg\cos\varphi - mr\dot{\varphi} = \lambda \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = 0, \\ r = l. \end{cases}$$

La force de réaction est dirigée suivant **r** et vaut

$$\lambda = -mg\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2.$$

4.26.

$$L^* = \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + mgr\cos\varphi + \lambda(\varphi - \Omega t)$$

$\lambda = 2mr\dot{r}\Omega + mgr\sin\Omega t$ est la force généralisée correspondant à la coordonnée φ (moment de la force).

4.27. a) $E = -\dfrac{\partial L}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{s} \dot{q}_i R_i.$

b) La loi de transformation des premiers membres des équations de mouvement est donnée au problème 4.3:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_i}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_i}=\sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right).$$

La même loi doit régir la transformation des seconds membres:

$$\widetilde{R}_i=\sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} R_k. \tag{1}$$

Si la loi de transformation des coordonnées n'implique pas explicitement le temps, les vitesses se transforment suivant la loi

$$\dot{q}_i=\sum_k \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k,$$

constituant la réciproque de (1).

Autrement dit, les composantes de la force R_k constituent un vecteur covariant, tandis que les composantes de la vitesse, un vecteur contravariant dans l'espace à s dimensions (voir [2], § 83).

Donc, en connaissant les réactions de liaison et de frottement en coordonnées cartésiennes, on est en mesure de déterminer les forces R_i en toutes coordonnées généralisées. En particulier, si les frottements sont exprimés au moyen de la fonction de dissipation $R_i=-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$, la transformation F se ramène au changement de variables.

4.28. Les équations mentionnées dans la condition s'obtiennent en éliminant λ_β des équations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}-\frac{\partial L}{\partial q_\beta}=\lambda_\beta, \quad \beta=1, \ldots, r,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}-\frac{\partial L}{\partial q_n}=-\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta b_{\beta n}, \quad n=r+1, \ldots, s,$$

et en tenant compte de ce que

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_n}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}+\sum_{\beta=1}^{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}b_{\beta n},$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_n}=\frac{\partial L}{\partial q_n}+\sum_{\beta=1}^{r}\sum_{m=r+1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}\frac{\partial b_{\beta m}}{\partial q_n}\dot{q}_m.$$

Donc les équations de mouvement d'un système à liaisons non holonomes ne se ramènent nullement aux équations de Lagrange et ceci nonobstant le fait que les équations de liaison autorisent l'éli-

mination de la fonction de Lagrange de certaines coordonnées et vitesses.

4.29. a) Tenant compte de ce que q_n entre dans L_n et L_{n+1}, on obtient l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_n}{\partial q_n}=\frac{\partial L_n}{\partial q_n}+\frac{\partial L_n}{\partial(\Delta q_n)}-\frac{\partial L_{n+1}}{\partial(\Delta q_{n+1})}\quad(\Delta q_n=q_n-q_{n-1}). \tag{1}$$

Pour $a\to 0$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial L_n}{\partial \dot{q}_n}\to\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial q/\partial t)},\quad \frac{1}{a}\frac{\partial L_n}{\partial q_n}\to\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q},$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\partial L_n}{\partial(\Delta q_n)}-\frac{\partial L_{n+1}}{\partial(\Delta q_{n+1})}\right]\to-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial q/\partial x)},$$

de sorte que les équations (1) se transforment en l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial q/\partial t)}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial q/\partial x)}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}. \tag{2}$$

Les dérivées $\partial/\partial t$ et $\partial/\partial x$ se rapportent ici à la fonction $q(x, t)$ et à ses dérivées.

Le système de N équations différentielles ordinaires (1) se transforme en une équation aux dérivées partielles (2). Dans un système continu, la variable x remplit le rôle de « numéro » du point.

On ne s'arrêtera pas sur les conséquences physiques de l'équation (2), vu que l'étude de systèmes à un nombre infini de degré de liberté relève du domaine non pas de la mécanique, mais de la théorie du champ (voir [4], ch. 11 ; [2], § 32).

b) $E=\int\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial q/\partial t)}\frac{\partial q}{\partial t}-\mathscr{L}\right\}dx.$

4.30. La fonction de Lagrange $L=\frac{mv^2}{2}-U(r)+\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\,\mathbf{v}$, où $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ est le potentiel vecteur du champ magnétique $\mathfrak{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ (il est bien entendu que $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ peut toujours être choisi sous forme de fonction homogène des coordonnées de degré $n+1$). Si dans la transformation de similitude $\mathbf{r}\to\alpha\mathbf{r}$, $t\to\alpha^{-1\frac{k}{2t}}$ le potentiel vecteur se transforme de la même façon que la vitesse, c'est-à-dire si $n=\frac{k}{2}$, alors $L\to\alpha^k L$. Aussi les équations de mouvement demeurent-elles inchangées dans cette transformation et la règle de similitude mécanique se trouve sauvegardée (voir [1], § 10).

Il s'ensuit de la déduction faite que la règle de similitude mécanique est également valable pour le champ magnétique constant et spatial, si toutefois dans la transformation de similitude sa valeur varie $\alpha^{\frac{k}{2}-1}$ fois (voir, par exemple, problèmes 2.30-2.33, 6.36).

4.31. L'énergie cinétique du système est $T=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$, par suite

$$2T=\sum \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a}\mathbf{v}_a=\frac{d}{dt}\left(\sum m_a\mathbf{v}_a\mathbf{r}_a\right)-\sum \mathbf{r}_a m_a\dot{\mathbf{v}}_a.$$

Avec la prise de moyenne sur un grand laps de temps le terme de la somme $\frac{d}{dt}\sum m_a\mathbf{v}_a\mathbf{r}_a$, constituant une dérivée totale par rapport au temps de la fonction bornée, devient nul (voir [1], § 10). En reportant dans le second terme de la somme $m_a\dot{\mathbf{v}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}+\frac{e_a}{c}[\mathbf{v}_a\mathfrak{H}]$ et en prenant la moyenne sur le temps, il vient

$$\left\langle 2T+\mathfrak{H}\sum \frac{e_a}{c}[\mathbf{r}_a\mathbf{v}_a]\right\rangle = k\langle U\rangle.$$

Les crochets angulaires $\langle\ \rangle$ désignent ici la prise de moyenne sur le temps. En particulier, si le champ magnétique $\mathfrak{H}$ est constant également dans le temps et $\frac{e_a}{m_a}=\frac{e}{m}$, on a alors

$$2\langle T\rangle+\frac{e}{mc}\mathfrak{H}\langle \mathbf{M}\rangle = k\langle U\rangle,$$

où $\mathbf{M}=\sum m_a[\mathbf{r}_a\mathbf{v}_a]$ est le moment cinétique du système.

4.32. a) Ecrivons $\frac{dA}{dt}$ sous forme de deux sommes

$$\frac{dA}{dt}=[m(\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3+\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3+\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3)-\dot{x}_1\dot{U}_{23}-\dot{x}_2\dot{U}_{13}-\dot{x}_3\dot{U}_{12}]-$$
$$-(\ddot{x}_1U_{23}+\ddot{x}_2U_{13}+\ddot{x}_3U_{12}). \qquad (1)$$

En profitant des équations de mouvement, on obtient

$$m\ddot{x}_1=F_{12}+F_{13},\quad m\ddot{x}_2=F_{21}+F_{23},\quad m\ddot{x}_3=F_{31}+F_{32}, \qquad (2)$$

$$F_{ik}=-F_{ki}=-\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i}=\frac{2g^2}{(x_i-x_k)^3}, \qquad (3)$$

et en introduisant les distances relatives

$$x_1-x_2=x,\quad x_2-x_3=y,\quad x_1-x_3=z,$$

écrivons la seconde somme (1) sous la forme

$$-\frac{2g^2}{m}\left[\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{z^3}\right)\frac{1}{y^2}+\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)\frac{1}{z^2}-\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{y^3}\right)\frac{1}{x^2}\right]. \qquad (4)$$

En groupant les termes au même degré de z, on peut récrire (4) sous la forme

$$\frac{2g^2(x-y)}{m}\left(\frac{1}{x^3y^3}-\frac{x^2+xy+y^2}{z^2x^3y^3}-\frac{x+y}{z^3x^2y^2}\right).$$

En y reportant $z = x + y$, on voit aussitôt que cette expression devient nulle.

La première somme de (1) devient nulle pour des forces arbitraires. Pour le montrer, il suffit de recourir aux équations de mouvement en la forme (2) et d'y porter

$$\dot{U}_{ik}=\frac{\partial U_{ik}}{\partial(x_i-x_k)}(\dot{x}_i-\dot{x}_k)=-(\dot{x}_i-\dot{x}_k)F_{ik}.$$

Indiquons enfin que dans le champ donné la transformation de similitude ne change pas la forme de l'action. Aussi, outre les trois intégrales mentionnées, existe-t-il une équation intégrale de mouvement (voir problème 4.13b)

$$m(x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2+x_3\dot{x}_3)-2Et. \tag{5}$$

4.33. Avec le rapprochement de tout couple de particules leur énergie d'interaction s'accroît indéfiniment, aussi les particules ne peuvent-elles pas passer « l'une à travers l'autre » et elles conservent sur la droite leur ordre de disposition.

Dans la collision de deux particules de même masse mais d'énergie d'interaction quelconque (garantissant l'impénétrabilité des particules) elles ne font qu'échanger leurs vitesses. (Cela découle des principes de conservation de l'énergie et de l'impulsion.) Si les chocs de trois particules s'effectuent l'un après l'autre, de manière que quand deux particules se rapprochent l'une de l'autre, la troisième s'en trouve suffisamment éloignée, il n'y a entre elles qu'un échange de vitesses, les collisions finissant quand devant se trouvera la plus rapide et derrière la plus lente des particules, c'est-à-dire que dans ce cas on a :

$$v_1' = v_3, \quad v_2' = v_2, \quad v_3' = v_1. \tag{1}$$

Dans le cas général de rapprochement simultané de trois particules les valeurs des vitesses ne se conservent pas du tout.

Il est d'autant plus remarquable que pour les forces mentionnées au problème précédent la réponse (1) se maintient. On peut le montrer en utilisant les trois intégrales de mouvement : P, E, A. Compte tenu de ce que pour $t \to \pm\infty$ la fonction $U_{ik} \to 0$, en confrontant P, E, A pour $t \to +\infty$ et pour $t \to -\infty$, on obtient trois équations :

$$\begin{gathered} v_1'+v_2'+v_3'=v_1+v_2+v_3, \\ (v_1')^2+(v_2')^2+(v_3')^2=v_1^2+v_2^2+v_3^2, \\ v_1'v_2'v_3'=v_1v_2v_3. \end{gathered} \tag{2}$$

En résolvant ce système par rapport à v_i', on obtient six solutions différentes. Toutefois, toutes ces solutions peuvent être prévues.

Il est aisé de vérifier que la solution (1) satisfait au système (2). Ensuite, vu que les équations (2) sont, vraisemblablement, symétriques par rapport aux six permutations possibles de particules, il devient évident que les autres racines du système (2) peuvent être obtenues par simple permutation dans (1).

Après quoi il n'est pas difficile de se convaincre que seule la réponse (1) peut se réaliser pour $t \to +\infty$, car toute autre variante suppose (en vertu des inégalités mentionnées $v_3 > v_2 > v_1$) une collision subséquente des particules.

§ 5. Petites oscillations de systèmes à un degré de liberté

5.1. a) $\omega^2 = \frac{V\alpha^2}{m}\sqrt{1-\left(\frac{F}{V\alpha}\right)^2}$; $U(x)$ a un minimum pour $F < V\alpha$;

b) $\omega^2 = \frac{8\pi}{3}\frac{V\alpha^4}{m}x_0^2\left(\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\right)^2$, où l'amplitude x_0 se détermine par l'égalité

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{3}V\alpha^4x^4 = \frac{1}{3}V\alpha^4x_0^4.$$

5.2. La fonction de Lagrange du système (voir [1], § 5, problème 4) est

$$L = ma^2\,[\dot{\theta}^2\,(1 + 2\sin^2\theta) + \Omega^2\sin^2\theta + 2\Omega_0^2\cos\theta],$$

où a été introduite la notation $\Omega_0^2 = 2g/a$.

Pour $\Omega > \Omega_0$ l'énergie potentielle du système

$$U(\theta) = -ma^2\,(\Omega^2\sin^2\theta + 2\Omega_0^2\cos\theta)$$

possède un minimum pour $\cos\theta_0 = \Omega_0^2/\Omega^2$. Développons $U(\theta)$ au voisinage de θ_0 et posons dans l'énergie cinétique

$$1 + 2\sin^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta_0 = 3 - 2\left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^4 \equiv \frac{M}{2ma^2},$$

alors

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

où $k = U''(\theta_0)$, $x = \theta - \theta_0$. Soit

$$\omega^2 = \frac{k}{M} = \Omega^2\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4} \quad (\Omega > \Omega_0).$$

Pour $\Omega \gg \Omega_0$ la pulsation des oscillations est proportionnelle à la vitesse angulaire $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\Omega$, tandis que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Si $\Omega \to \Omega_0$, les petites oscillations s'effectuent avec la pulsation $\omega \to 0$, et $\theta_0 \to 0$.

Si $\Omega < \Omega_0$, on peut étudier les oscillations au voisinage de $\theta_0 = 0$ au cas de chocs élastiques entre les masses latérales

$$\omega^2 = \Omega_0^2 - \Omega^2 \quad (\Omega < \Omega_0)$$

Pour $\Omega = \Omega_0$ l'énergie potentielle U a un minimum au cas de $\theta_0 = 0$ et peut être représentée en son voisinage sous la forme

$$U = ma^2\Omega_0^2\left(-2 + \frac{\theta^4}{4}\right)$$

autrement dit que les oscillations sont essentiellement non linéaires. En conservant également dans l'énergie cinétique les termes jusqu'au quatrième ordre, il vient

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = 8\int_0^{\theta_m} \frac{\sqrt{1+2\theta^2}\,d\theta}{\sqrt{\Omega_0^2(\theta_m^4 - \theta^4)}}.$$

θ_m est ici l'amplitude des oscillations (comp. [1], § 11, problème 2a).

5.3. $\omega^2 = \frac{3g}{R}\,|1 - x_0^2|$, où $x_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{8mgR^2}}$.

Pour $x_0 > 1$, le point A est la position d'équilibre stable et pour $x_0 < 1$, d'équilibre instable. La position φ_0 d'équilibre stable pour $x_0 < 1$ se détermine par la condition $\sin\frac{\varphi_0}{2} = x_0$.

5.4.

$$r = r_0 + a\cos\omega(t - t_0),$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Omega(t - t_0) - \frac{2a\Omega}{r_0\omega}\sin[\omega(t - t_0)],$$

où r_0, φ_0, a, t_0 sont des constantes d'intégration ($a \ll r_0$),

$$\Omega = \sqrt{\frac{n\alpha}{m}}\,r_0^{-\frac{n+2}{2}}, \quad \omega = \Omega\sqrt{2-n}.$$

5.5. Au point $\theta = \theta_0$ l'énergie potentielle efficace $U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2\,ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta$ (voir [1], § 14, problème 1) a un minimum, aussi $U'^{\text{va}}_{\text{eff}}(\theta_0) = 0$. D'où il s'ensuit que

$$M_z^2 = m^2l^3g\sin^4\theta_0\cos^{-1}\theta_0,$$

tandis que la pulsation des petites oscillations est

$$\omega(\theta_0) = \sqrt{\frac{U''_{\text{eff}}(\theta_0)}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{1+3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0}}.$$

Pour que ce calcul soit applicable, il faut que

$$\frac{1}{2}U''_{\text{eff}}(\theta_0)(\Delta\theta)^2 \gg \frac{1}{6}\,|\,U'''_{\text{eff}}(\theta_0)\,|\,(\Delta\theta)^3,$$

où $\Delta\theta$ est l'amplitude des oscillations. Si $\theta_0 \sim 1$, cette condition est remplie pour $\Delta\theta \ll 1$. Cependant quand $\theta_0 \ll 1$, il s'avère que $U'''_{\text{eff}}(\theta_0) \sim \frac{1}{\theta_0}$ et les oscillations en θ ne peuvent être considérées comme petites que si $\Delta\theta \ll \theta_0$. Néanmoins, dans ce cas également, le résultat obtenu $\omega = 2\sqrt{g/l}$ est valable même pour $\Delta\theta \sim \theta_0$, quand les oscillations en θ cessent d'être harmoniques. En fait, il se produit dans ce cas suivant les axes x et y de petites oscillations harmoniques de pulsation $\sqrt{g/l}$, c'est-à-dire que le pendule décrit une ellipse en effectuant en une révolution deux oscillations suivant l'angle θ (voir [1], § 23, problème 3).

5.6. L'énergie potentielle efficace des oscillations radiales d'une molécule est

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(r-r_0)^2 + \frac{M^2}{2mr^2},$$

où r est la distance séparant les atomes et m la masse réduite. L'addition du second terme, considéré comme une petite correction, implique un petit écartement de la position d'équilibre.

$$\delta r_0 = \frac{M^2}{m^2\omega_0^2 r_0^3}.$$

La variation de la pulsation se déterminera par développement de $U_{\text{eff}}(r)$ en série près du point $r_0 + \delta r_0$:

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(r-r_0-\delta r_0)^2 + \frac{M}{2mr_0^2} + \frac{3M^2}{2mr_0^4}(r-r_0-\delta r_0)^2.$$

De là on tire la correction à la pulsation

$$\delta\omega = \frac{3M^2}{2m^2\omega_0 r_0^4} = \frac{3\Omega^2}{2\omega_0}$$

où $\Omega = M/mr_0^2$ est la vitesse moyenne de rotation de la molécule.

5.7. a) L'écartement de la position d'équilibre est

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}, \quad \omega^2 = \frac{2k}{m}$$

b) Soit f la tension d'un ressort. Pour des petits écarts $|y| \ll \ll \sqrt{fl/k}$, les oscillations sont harmoniques $y = A\cos(\omega t + \varphi)$, $\omega^2 = 2f/ml$.

Pour $f = kl$ la pulsation d'oscillations est la même qu'au point a). Si les ressorts ne sont pas tendus ($f = 0$), les oscillations ne sont pas linéaires, la force de rappel étant $F = -ky^3/l^2$ et la pulsation (voir problème 5.1b)

$$\omega = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\sqrt{\frac{2k}{m}}\,\frac{y_m}{l}$$

(y_m étant l'amplitude des oscillations).

Si la particule peut se mouvoir sur le plan xy, son mouvement, pour $f \neq 0$ et des petits écarts, est un mouvement harmonique le long des axes x et y avec les pulsations $\omega_x^2 = 2k/m$ et $\omega_y^2 = 2f/ml$ respectivement (voir problème 6.3).

5.8. Soit y la coordonnée de la particule comptée à partir du point de suspension supérieur. La fonction de Lagrange du système

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} - k(y-l)^2 + mgy = \frac{m\dot{y}^2}{2} - k\left(y - l - \frac{mg}{2k}\right)^2 + \text{const}$$

correspond à un oscillateur de pulsation $\omega^2 = \frac{2k}{m}$ et dont la position d'équilibre $y_0 = l + \frac{mg}{2k}$, donc $y = y_0 + A\cos(\omega t + \varphi)$.

Notons qu'en choisissant en guise de coordonnée l'écart de la position d'équilibre on élimine de la fonction de Lagrange le champ de gravité.

5.9. L'angle d'écart du pendule de la verticale est

$$\varphi = \frac{a\Omega^2}{g - l\Omega^2}\cos\Omega t, \quad \left|\frac{a\Omega^2}{g - l\Omega^2}\right| \ll 1$$

(voir aussi problème 8.3).

Des oscillations sont également possibles au voisinage de la direction du rayon vecteur $\varphi = \Omega t + \frac{g}{a\Omega^2}\sin\Omega t$, $\Omega^2 \gg \frac{g}{a}$.

5.10. Le courant dans le circuit

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{U_0\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega\mathcal{L} - 1/\omega C)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega\mathcal{L} - 1/\omega C}{R}$$

peut être obtenu en résolvant l'équation de Lagrange pour q. La fonction de Lagrange du système $L = \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C}$ (voir problème 4.22) est une fonction dissipative qui est égale à $\frac{1}{2}Rq^2$ (voir [3], § 48).

5.11. La solution générale de l'équation de mouvement (voir [1], § 26; voir de même [14])

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}\cos\gamma t$$

à la condition que $\omega^2=\omega_0^2-\lambda^2>0$ prend la forme

$$x(t)=e^{-\lambda t}(a\cos\omega t+b\sin\omega t)+\frac{F[(\omega_0^2-\gamma^2)\cos\gamma t+2\lambda\gamma\sin\gamma t]}{m[(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2]},$$

où a et b sont des constantes définies par les conditions initiales. En posant $x(0)=\dot{x}(0)=0$, on obtient en définitive

$$x(t)=\frac{F}{m[(\omega_0^2-\gamma^2)^2+4\lambda^2\gamma^2]}\Big[(\omega_0^2-\gamma^2)(\cos\gamma t-e^{-\lambda t}\cos\omega t)+$$
$$+2\lambda\gamma\left(\sin\gamma t-\frac{\omega_0^2+\gamma^2}{2\gamma\omega}e^{-\lambda t}\sin\omega t\right)\Big]. \qquad (1)$$

Etudions la solution obtenue au voisinage de la résonance $\gamma=\omega+\varepsilon$, $|\varepsilon|\ll\omega$. Si le frottement est complètement absent,

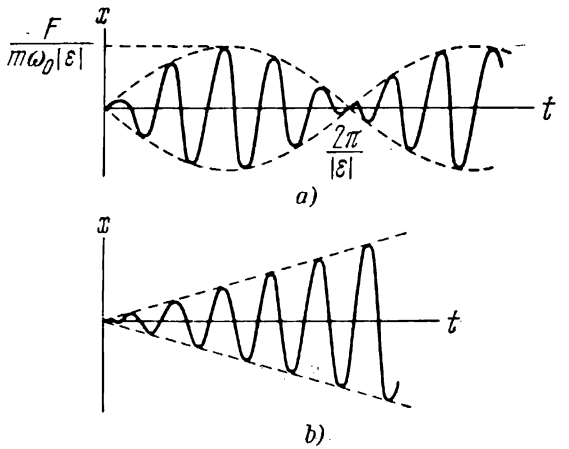


Fig. 115

c'est-à-dire si $\lambda=0$, au voisinage de la résonance, le mouvement de l'oscillateur est un battement:

$$x=\frac{F}{m\omega_0\varepsilon}\sin\frac{\varepsilon t}{2}\cdot\sin\omega_0 t, \qquad (2)$$

de plus, la grandeur de l'amplitude et la fréquence de battement sont fonction du degré de voisinage de la résonance (fig. 115, *a*). Mais quand $\gamma=\omega_0$ (c'est-à-dire qu'il y a résonance totale) pour $\varepsilon\to 0$

on obtient

$$x = \frac{F}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t, \tag{3}$$

c'est-à-dire qu'on a des oscillations dont l'amplitude $a(t)$ croît indéfiniment suivant la loi $a(t) = Ft/2m\omega_0$ (fig. 115, *b*).

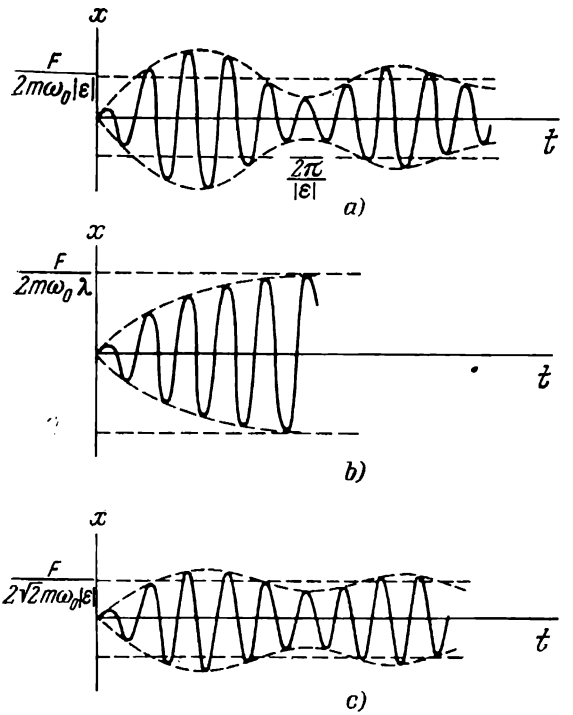


Fig. 116

En présence d'un frottement, même minime ($\lambda \ll \omega_0$), l'aspect du mouvement se modifie qualitativement. Vu que pour $\lambda \ll |\varepsilon|$, en partant de (1), il est aisé d'obtenir au lieu de (2)

$$x(t) = \frac{F}{2m\omega_0\varepsilon} \sqrt{1 - 2e^{-\lambda t} \cos \varepsilon t + e^{-2\lambda t}} \cos(\omega_0 t + \varphi_1(t)). \tag{4}$$

$\varphi_1(t)$ est ici une certaine phase d'oscillations qui varie lentement avec le temps. L'amplitude des oscillations oscille lentement avec la pulsation $|\varepsilon|$ autour de la valeur $F/2m\omega_0 |\varepsilon|$ en s'en rapprochant progressivement (fig. 116, *a*). Il est remarquable qu'au cours de la période de transition l'amplitude peut prendre des valeurs presque deux fois plus grandes que celle des oscillations permanentes.

Pour $|\varepsilon| \ll \lambda \ll \omega_0$, il vient

$$x = \frac{F}{2m\omega_0\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\cos(\omega_0 t + \varphi_2(t)). \tag{5}$$

Dans ce cas on a un phénomène transitoire avec une amplitude croissant régulièrement et qui s'approche asymptotiquement de la valeur $F/2m\omega_0\lambda$, définie par le coefficient de frottement λ (fig. 116, *b*). Enfin si ε et λ sont des grandeurs de même petitesse, $|\varepsilon| \sim \lambda \ll \omega_0$,

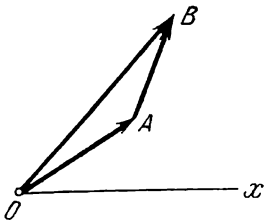


Fig. 117

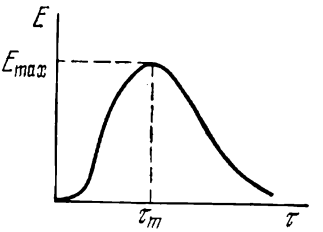


Fig. 118

les oscillations de l'amplitude autour de la valeur correspondant à celle des oscillations permanentes $F/2\sqrt{2}m\omega_0|\varepsilon|$ sont très limitées (pour le cas de $\varepsilon \approx \lambda$ voir fig. 116, *c*).

Le système aboutit donc à des oscillations permanentes dans les trois cas (fig. 116) au bout du temps t d'ordre $1/\lambda$ (c'est d'ailleurs évident si l'on part de (1)).

Il est commode de mener l'étude qualitative du phénomène d'établissement des oscillations (du phénomène transitoire) pour $\lambda \ll \omega_0$ en recourant aux diagrammes vectoriels (fig. 117). L'oscillation forcée se représente en projection sur l'axe x du vecteur $\overrightarrow{OA}$ mis en rotation avec la vitesse angulaire γ. Le vecteur de l'oscillation libre $\overrightarrow{AB}$ tourne avec la vitesse angulaire ω et sa longueur diminue proportionnellement à $e^{-\lambda t}$. A l'origine on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \approx 0$.

Quelle est la nature du phénomène transitoire au cas où $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) \neq 0$?

5.12. a) L'énergie acquise par l'oscillateur

$$E = \frac{\pi F^2}{2m}\tau^2 \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega\tau)^2\right]$$

dépend essentiellement de la vitesse avec laquelle est mise en œuvre la force (du paramètre $\omega\tau$). Dans un choc instantané ($\omega\tau \ll 1$) et dans une mise en œuvre très lente de la force ($\omega\tau \gg 1$), les transferts d'énergie sont faibles, le maximum de l'énergie transférée $E_{max} = \frac{\pi F^2}{m\omega^2 e}$ étant atteint pour $\tau_m = \sqrt{2}/\omega$ (fig. 118).

b) Si $x \to a \cos(\omega t + \varphi)$ pour $t \to \infty$ *), on a alors

$$\Delta E = E(+\infty) - E(-\infty) = \frac{\pi F^2}{2m} \tau^2 e^{-\frac{1}{2}(\omega\tau)^2} - \sqrt{\pi}\, a\omega\tau F e^{-\frac{1}{4}(\omega\tau)^2} \sin\varphi.$$

Suivant la grandeur de φ l'oscillateur acquiert ou perd de l'énergie. Cette variation de la quantité d'énergie rappelle l'absorption ou l'émission forcée de la lumière par l'atome.

Avec la prise de moyenne sur la phase φ on obtient une réponse identique au point a).

5.13. a) $x(t) = \frac{1}{2\mu}[\xi_1(t) + \xi_2(t)]$, où

$$\xi_{1,2} = e^{\pm\mu t}\left[\int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{\pm\mu\tau} d\tau + \dot{x}_0 \mp \mu x_0\right];$$

b) $$x(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im}\left\{e^{i\omega t - \lambda t}\left[\int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{\lambda\tau - i\omega\tau} d\tau + \dot{x}_0 + (i\omega\lambda) x_0\right]\right\},$$

où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

5.14. Sur l'oscillateur agit la force

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|), \tag{1}$$

où $\mathbf{r}(t)$ est l'écartement de l'oscillateur, tandis que $\mathbf{r}_0(t)$ est le rayon vecteur de la particule incidente. L'écart de la particule étant supposé faible, on pose $\mathbf{r}_0(t) = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t$ ($\boldsymbol{\rho}$ étant le paramètre d'impact et les vecteurs $\boldsymbol{\rho}$ et $\mathbf{v}$ mutuellement orthogonaux). En admettant également l'amplitude des oscillations de l'oscillateur petite, on pose dans (1) (après dérivation) $\mathbf{r} = 0$; alors $\mathbf{F}(t) = -2\varkappa^2 V \times$ $\times (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t) \cdot \exp(-\varkappa^2\rho^2 - \varkappa^2 v^2 t^2)$.

Les oscillations en directions de $\boldsymbol{\rho}$ et $\mathbf{v}$ sont indépendantes et s'excitent jusqu'aux énergies

$$\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F_\rho(t) e^{-i\omega t} dt\right|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} F_v(t) e^{-i\omega t} dt\right|^2 \tag{2}$$

respectivement. F_v et F_ρ sont ici les composantes de la force en directions de $\mathbf{v}$ et $\boldsymbol{\rho}$. L'énergie d'excitation totale de l'oscillateur **)

$$\varepsilon = \frac{\pi V^2}{2E}(x + a) e^{-\varkappa a} \tag{3}$$

*) φ a le sens de « phase d'impact », c'est-à-dire de phase qu'aurait l'oscillateur pour $t = 0$ en l'absence de la force imposée.

**) Il est intéressant de noter que la dépendance $\varepsilon(\omega)$ est analogue à celle de la densité spectrale de rayonnement d'un électron rapide dans le champ $U(r)$ (voir [2], § 67).

où

$$E=\frac{1}{2}mv^2,\quad a=\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\varkappa v}\right)^2,\quad x=2(\varkappa\rho)^2.$$

La section d'excitation de l'oscillateur jusqu'à l'énergie comprise entre ε et $\varepsilon+d\varepsilon$

$$d\sigma=\pi\sum_k|d\rho_k^2|=\frac{\pi}{2\varkappa^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\sum_k\left|\frac{a+x_k(\varepsilon)}{1-a-x_k(\varepsilon)}\right|, \tag{4}$$

où x_k sont les différentes racines de l'équation (3).

Il est commode de mener l'étude ultérieure en résolvant l'équation (3) graphiquement, comme on l'a fait au problème 3.10a. Pour

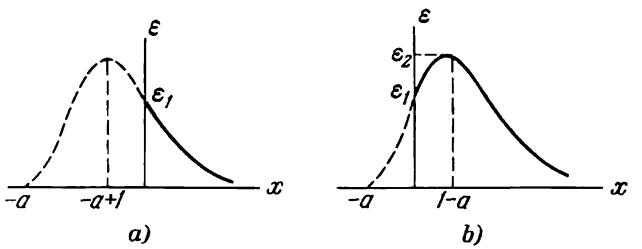


Fig. 119

$\varepsilon\ll\varepsilon_1=\frac{\pi V^2}{2E}ae^{-a}$, on obtient $d\sigma=\frac{\pi}{2\varkappa^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ (on pose dans l'équation (4) $x_k(\varepsilon)\gg 1$, $x_k\gg a$). Pour des ε plus grands, le résultat dépend de la grandeur de a. Si $a>1$, seul $\varepsilon<\varepsilon_1$ est possible

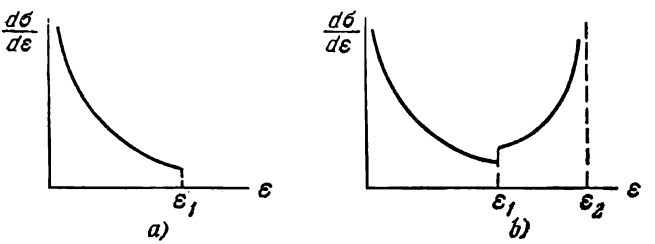


Fig. 120

(fig. 119, a; pour la section, voir fig. 120, a). Si, par contre, $a<1$, il se peut que $\varepsilon<\varepsilon_2=\frac{\pi V^2}{2Ee}$ (fig. 119, b), de plus, pour $\varepsilon=\varepsilon_1$, le graphique $d\sigma/d\varepsilon$ subit un bond, tandis que pour $\varepsilon_2-\varepsilon\ll\varepsilon_2$ il présente une singularité intégrable (fig. 120, b)

$$d\sigma=\frac{\pi}{\sqrt{2}\varkappa^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon/\varepsilon_2}}$$

5.15. Si l'oscillateur possède une « phase d'impact » égale à φ (voir problème 5.12b), en répétant les calculs du problème précédent, on obtient pour l'énergie de l'oscillateur l'expression :

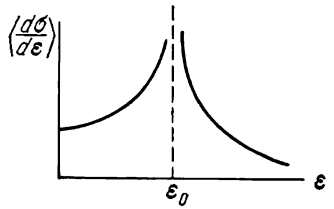


Fig. 121

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{-2(\varkappa\rho)^2} + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}\, e^{-(\varkappa\rho)^2}\cos\varphi + \varepsilon_0, \tag{1}$$

où

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{4E}\left(\frac{V\omega}{\varkappa v}\right)^2 \exp\left\{-\frac{\omega^2}{2(\varkappa v)^2}\right\}.$$

Avec $\cos\varphi > 0$ pour tous les ρ il s'avère que $\varepsilon > \varepsilon_0$, tandis qu'avec $\cos\varphi < 0$, il existe des $\rho_{1,2}$ pour lesquels $\varepsilon < \varepsilon_0$. En résolvant l'équation (1) en ρ^2, il vient

$$\rho^2 = \varkappa^{-2}\ln\frac{\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}}{-\cos\varphi + \sqrt{(\varepsilon/\varepsilon_0) - \sin^2\varphi}} \quad \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_0,$$

$$\rho^2_{1,2} = \varkappa^{-2}\ln\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_0}\,|\cos\varphi| \pm \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0\sin^2\varphi}} \quad \text{pour } \cos\varphi < 0$$

et $\varepsilon_0 > \varepsilon > \varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 \sin^2\varphi$. Soit

$$d\sigma = \pi\left|\frac{d\rho^2}{d\varepsilon}\right| d\varepsilon = \frac{\pi}{2\varkappa^2}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0\sin^2\varphi - \cos\varphi\cdot\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2\sin^2\varphi}} \tag{2}$$

pour $\varepsilon > \varepsilon_0$ et

$$d\sigma = \pi d\,(-\rho_1^2 + \rho_2^2) = \varkappa^{-2}\,\frac{\varepsilon_0\pi\,|\cos\varphi|\,d\varepsilon}{(\varepsilon_0 - \varepsilon)\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2\sin^2\varphi}} \tag{3}$$

pour $\varepsilon_{\min} < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\cos\varphi < 0$.

En prenant la moyenne sur toutes les phases φ possibles pour ε donné, il vient

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{\pi}{2\varkappa^2\,|\varepsilon_0 - \varepsilon|}. \tag{4}$$

(fig. 121). La moyenne est prise en utilisant les formules

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\,d\varphi \quad \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_0 \text{ et}$$

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\,d\varphi \quad \text{pour } \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Dans ce cas $\alpha = \arcsin\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$.

La divergence des sections (2), (3) et (4) pour $\varepsilon \to \varepsilon_0$ est reliée au fait que pour tous ρ grands l'oscillateur s'excite.

Quelle est la raison de la singularité complémentaire de (3) et pourquoi est-elle absente dans (4).

5.16. Pour la fonction de Lagrange $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + xF(t)$ l'énergie du système est

$$E(t) = \frac{m}{2} (\operatorname{Re} \xi)^2 + \frac{m}{2} (\operatorname{Im} \xi)^2 - \frac{F(t)}{\omega} \operatorname{Im} \xi = \frac{m}{2} \left| \xi - \frac{iF(t)}{m\omega} \right|^2 - \frac{F^2(t)}{2m\omega^2},$$

où

$$\xi = \dot{x} + i\omega x = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega\tau} \frac{1}{m} F(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

(voir [1], § 22). Bien que l'expression de l'énergie ait une limite déterminée quand $t \to \infty$, l'intégrale déterminant $\xi(t)$ pour $t \to \infty$, n'a pas de limite (car pour $\tau \to \infty$ $F(\tau) \to F_0$). En intégrant (1) par parties, il vient

$$\xi(t) = \frac{iF(t)}{m\omega} - \frac{ie^{i\omega t}}{m\omega} \int_{-\infty}^{t} F'(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \tag{2}$$

où $F'(\tau) \to 0$ pour $\tau \to \infty$ et l'intégrale converge pour $t \to \infty$. De (2) il s'ensuit que le mouvement de l'oscillateur pour $t \to \infty$ devient des oscillations harmoniques (le second terme de (2)) se situant près de la nouvelle position d'équilibre $x_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}$ (premier terme de (2)). L'énergie transmise à l'oscillateur prend par suite la forme

$$E(+\infty) = -\frac{F_0^2}{2m\omega^2} + \frac{1}{2m\omega^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F'(t)\, e^{-i\omega\tau}\, dt \right|^2$$

5.17. $\Delta E = E(+\infty) - E(-\infty) =$

$$= -\frac{F_0^2}{2m\omega^2} + \frac{\lambda^4 F_0^2}{2m\omega^2 (\lambda^2 + \omega^2)^2} - \frac{a\lambda^2 F_0 \cos\varphi}{\lambda^2 + \omega^2},$$

$E_0 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$, φ étant la «phase d'impact» (voir note relative au problème 5.12b).

5.18. En réalisant dans la formule $\xi(\tau) = \xi(0)\, e^{i\omega\tau} + \frac{1}{m} e^{i\omega\tau} \int_0^{\tau} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ (voir [1], § 22) la n-ième intégration par

parties, on obtient l'expression

$$\xi(\tau)=\xi(0)\,e^{i\omega\tau}+\frac{iF_0}{m\omega}+\frac{F^{(n)}(+0)\,e^{i\omega\tau}-F^{(n)}(\tau-0)}{m\,(i\omega)^{(n+1)}}+$$

$$+\frac{e^{i\omega\tau}}{m\,(i\omega)^{(n+1)}}\int\limits_0^\tau F^{(n+1)}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

Ici $|\xi(0)|=a_0\omega$, où a_0 est l'amplitude des oscillations jusqu'à l'instant de l'application de la force. L'avant dernier terme dans cette formule en ordre de grandeur est égal à $\frac{F_0}{m\omega}(\omega\tau)^{-n}$, tandis que le dernier est, généralement parlant, beaucoup inférieur (si $F^{(n+1)}(t)$ varie graduellement). Le carré de l'amplitude d'oscillation $\omega^{-2}\left|\xi-\frac{iF_0}{m\omega}\right|^2$ pour $t>\tau$ est en ordre de grandeur égal à $\left(a_0+\frac{F_0(\omega\tau)^{-n}}{m\omega^2}\right)^2$.

Donc si la force est appliquée lentement et graduellement, l'énergie transmise est très petite.

5.19. a) Dans l'intervalle de temps $0\leqslant t\leqslant\tau$ les oscillations acquièrent la forme $x=Ft/m\omega^2\tau+B\sin\omega t+C\cos\omega t$.

Le mouvement deviendra stationnaire si

$$x(\tau)=x(0),\quad x(\tau)=\dot{x}(0).$$

Ces conditions aboutissent au système d'équations

$$\left.\begin{aligned}\frac{F}{m\omega^2}+B\sin\omega\tau+C(\cos\omega\tau-1)=0,\\ B(\cos\omega\tau-1)-C\sin\omega\tau=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

qui permet de déterminer les constantes B et C. Donc pour $0\leqslant t\leqslant\tau$

$$x(t)=\frac{F}{m\omega^2}\left[\frac{t}{\tau}-\frac{\sin(\omega t-\omega\tau/2)}{2\sin(\omega\tau/2)}\right].\qquad(2)$$

Si, par contre, t se situe dans l'intervalle $n\tau\leqslant t\leqslant(n+1)\tau$ (où n est un entier), il faut remplacer dans le second membre de (2) t par $t'=t-n\tau$ $(0\leqslant t'\leqslant\tau)$.

Au cas où $\omega\tau$ est voisin du multiple entier de 2π, le deuxième terme dans (2) devient très grand, cas très proche de la résonance. Pour $\omega\tau=2\pi l$ (l est un entier) il ne peut y avoir d'oscillations permanentes ((1) est un système contradictoire *)).

*) En représentant la force sous forme d'une série de Fourier

$$F(t)=\frac{F}{2}-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{F}{\pi l}\sin\frac{2\pi l}{\tau}t,$$

b) $x(t)=\frac{1}{\omega}\operatorname{Im}\left[\frac{iF}{m\omega}+\frac{F}{m(\lambda+i\omega)}e^{-\lambda t}+Ae^{i\omega t}\right]$ pour $0\leqslant t\leqslant\tau$; ici

$$A=-\frac{F}{m(\lambda+i\omega)}\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{1-e^{i\omega\tau}};$$

au cas de $n\tau\leqslant t\leqslant(n+1)\tau$, il faut remplacer dans le second membre t par $t'=t-n\tau$.

c) Pour $\omega_0=(\mathscr{L}C)^{-1/2}>\lambda=R/2\mathscr{L}$, le courant permanent

$$I(t)=-\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}\frac{V}{\mathscr{L}}\operatorname{Im}\left(\frac{e^{\alpha t}}{1-e^{\alpha t}}+\frac{1}{\alpha\tau}\right),$$

$$\alpha=-\lambda+i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} \tag{1}$$

pour $0\ll t\ll\tau$. Pour $n\leqslant\frac{t}{\tau}\leqslant n+1$, il faut remplacer dans la formule du courant t par $t'=t-n\tau$.

Peut-on, en se servant de (1), obtenir l'expression du courant permanent au cas où $\omega_0<\lambda$ ou si $\omega_0=\lambda$?

5.20. a) $A=\frac{1}{T}\int\limits_0^T F(t)\,\dot{x}(t)\,dt=$

$$=\frac{\lambda\omega^2}{m}\left[\frac{f_1^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\lambda^2\omega^2}+\frac{4f_2^2}{(\omega_0^2-4\omega^2)^2+16\lambda^2\omega^2}\right],$$

c'est-à-dire que chacun des deux harmoniques de la force transmet l'énergie indépendamment de l'autre $\left(\text{la période est ici } T=\frac{2\pi}{\omega_1}\right)$.

b) $A=\frac{4\lambda\omega^2}{m}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a|^2n^2}{(\omega_0^2-n^2\omega^2)^2+4\lambda^2\omega^2n^2}$.

c) $\langle A\rangle=\frac{\lambda}{m}\left[\frac{f_1^2\omega_1^2}{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\lambda^2\omega_1^2}+\frac{f_2^2\omega_2^2}{(\omega_0^2-\omega_2^2)^2+4\lambda^2\omega_2^2}\right]$.

Au cas d'effet de moyenne sur un grand laps de temps $T\gg\frac{2\pi}{\omega_{1,2}}$, il s'avère que chacune des forces $f_1\cos\omega_1 t$ et $f_2\cos\omega_2 t$ transmet l'énergie à l'oscillateur l'une indépendamment de l'autre. Cela découle du fait que seuls les carrés moyens des fonctions trigonomé-

---

on constate que l'intensification d'oscillations de résonance peut être impliquée par chacune des harmoniques de la force imposée. Pour $\tau=2\pi l/\omega$, au cas de t suffisamment grands (dites de quel ordre de grandeurs?)

$$x(t)\sim-\frac{Ft}{2\pi m\omega l}\sin\omega t.$$

triques sont différents de zéro. Pour $T \to \infty$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega_1 t\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega_1 T}(1 - \sin 2\omega_1 T) \to \frac{1}{2},$$

tandis que les valeurs moyennes des produits croisés du type $\sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 t$, $\sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t$, etc. disparaissent. Par exemple, pour $T \to \infty$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t\, dt = \frac{1 - \cos(\omega_1 - \omega_2) T}{2(\omega_1 - \omega_2) T} + \frac{1 - \cos(\omega_1 + \omega_2) T}{2(\omega_1 + \omega_2) T} \to 0.$$

d) Le déplacement de l'oscillateur

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\omega) e^{i\omega t} d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega};$$

d'où il s'ensuit que le travail total de la force $F(t)$ est

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) F(t)\, dt = \frac{8\pi\lambda}{m}\int_0^{\infty} \frac{\omega^2 |\psi(\omega)|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} d\omega. \qquad (1)$$

Pour démontrer cette dernière égalité, on a utilisé la transformation inverse de Fourier $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i\omega t}\, dt = 2\pi\psi^*(\omega)$.

Pour $\lambda \ll \omega_0$ l'apport essentiel à l'intégrale (1) est fourni par le voisinage de la pulsation propre de l'oscillateur $\omega = \omega_0$.

Donc

$$A \approx \frac{4\pi |\psi(\omega_0)|^2 \omega_0}{m}\left[\lambda \int_0^{\infty} \frac{d\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2}\right.\cdot$$

Le facteur entre crochets se calcule alors aisément et s'avère indépendant de λ, $A = \frac{|2\pi\psi(\omega_0)|^2}{2m}$ (comp. avec formule (22, 12) de [1]).

5.21. Tenant compte de ce que l'écartement de l'oscillateur x est une quantité petite de premier ordre en F, il vient

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t)\dot{x}\, dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{x}\, dt,$$

$$\Delta P = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t)\, dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) - \dot{f}(t)\frac{x}{V}\right] dt.$$

En intégrant le second terme de la somme par parties, on obtient

$$\Delta P = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt + \frac{\Delta E}{V}.$$

En particulier, si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$, $\Delta E = V\Delta P$.

Éclairons la condition de petitesse x sur l'exemple de l'action sur l'oscillateur d'un groupe d'ondes $f(t) = fe^{-|t|/\tau}\cos\gamma t$. Dans le développement de $F(x, t)$, le petit paramètre est x/λ, où $\lambda = 2\pi V/\gamma$ est la longueur d'onde caractéristique, c'est-à-dire

$$\frac{|x|}{\lambda} = \frac{f\gamma}{2\pi m\,|\omega^2 - \gamma^2|} \ll 1.$$

§ 6. Petites oscillations de systèmes à plusieurs degrés de liberté

6.1. Soit x_i l'écartement de l'i-ième particule de la position d'équilibre ($i = 1, 2$). La fonction de Lagrange du système est

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}[x_1^2 + (x_1 - x_2)^2]. \tag{1}$$

Les équations de mouvement

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0,$$
$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0,$$

après avoir substitué $x_i = A_i\cos(\omega t + \varphi)$, se réduisent à un système d'équations algébriques

$$(-m\omega^2 + 2k)A_1 - kA_2 = 0,$$
$$-kA_1 + (-m\omega^2 + k)A_2 = 0. \tag{2}$$

Ce système comporte une solution non triviale, si son déterminant est nul :

$$(-m\omega^2 + 2k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0. \tag{3}$$

D'où on obtient les pulsations propres

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}\cdot\frac{k}{m}.$$

Des deux équations de (2), en vertu de (3), seule l'une d'elles est indépendante. En reportant les valeurs ω_1 et ω_2 dans (2), on obtient

les relations liant les amplitudes

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{5}+1} A_2 \equiv A \quad \text{pour } \omega = \omega_1,$$

$$A_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}-1} A_2 \equiv B \quad \text{pour } \omega = \omega_2.$$

Donc les oscillations libres du système se définissent par

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{\sqrt{5}-1}{2} B\cos(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (4)$$

Les constantes A, B, φ_1, φ_2 se déterminent d'après les conditions initiales.

Les oscillations libres (4) décrivent complètement le mouvement du système. Cependant, lors de la résolution de nombreux problèmes, il est plus commode de se servir de coordonnées normales, par exemple, dans les problèmes avec force imposée (voir problèmes 6.2b et 6.24), dans la construction de la théorie des perturbations (voir problème 6.34), avec le passage à la mécanique quantique. La raison en est dans le fait que les coordonnées normales q_i définies par les égalités

$$x_1 = q_1 + q_2,$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} q_1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} q_2, \qquad (5)$$

transforment la fonction de Lagrange (1) en une somme de carrés

$$L = \frac{5+\sqrt{5}}{4} m(\dot{q}_1^2 - \omega_1^2 q_1^2) + \frac{5-\sqrt{5}}{4} m(\dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2), \qquad (6)$$

quant aux équations de mouvement pour q_1 et q_2 elles se séparent :

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0.$$

De façon analogue le problème de mouvement de deux corps en interaction se réduit aux problèmes de mouvement du centre d'inertie et de mouvement de la particule à masse réduite dans un champ de forces données.

Remarquons enfin qu'un cas plus général de système à N particules possédant un point de suspension est étudié dans le problème 7.2.

6.2. La fonction de Lagrange du système est

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}[(x_1 - a(t))^2 + (x_1 - x_2)^2].$$

Si l'on élimine le terme $-\frac{1}{2}ka^2(t)$, qui est une dérivée totale par rapport au temps, on peut récrire L sous forme

$$L = L_0 + \Delta L, \quad \Delta L = x_1 ka(t), \tag{1}$$

où L_0 est la fonction de Lagrange du système à point de suspension immobile (voir formule (1) du problème précédent). Cette écriture est commode, car elle permet aussitôt de transcrire le « vecteur » de la force extérieure

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Les équations de mouvement

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) &= ka\cos\gamma t, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

par substitution *) de

$$x_1 = A\cos\gamma t, \quad x_2 = B\cos\gamma t \tag{3}$$

se transforment en un système linéaire inhomogène de deux équations en A et B. Soit

$$A = \frac{ak(-m\gamma^2 + k)}{m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)},$$

$$B = \frac{ak^2}{m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)},$$

où $\omega_{1,2}^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}$ sont les pulsations normales du système.

La dépendance des amplitudes A et B de la pulsation γ est représentée sur la figure 122, *a*.

Avec le passage par les points de résonance $\gamma = \omega_{1,2}$ les amplitudes A et B changent de signe, ce qui correspond à une variation de phase des oscillations de π. Pour une pulsation $\gamma = \sqrt{k/m}$, les oscillations de la masse supérieure s'amortissent complètement: $A = 0$.

La figure 122, *b* représente la forme approchée de dépendance de $|A|$ de la pulsation de la force imposée en cas de frottement.

*) La solution générale du système (2) est la superposition d'oscillations libres et entretenues. Même avec un petit frottement, les oscillations libres s'amortissent. Aussi après un intervalle prolongé la solution du système (2) cesse-t-elle de dépendre des conditions initiales et se réduit aux oscillations entretenues (3).

Pour quelles pulsations γ s'amortiront les oscillations de la particule supérieure, si l'on suspend à la particule inférieure par un ressort identique encore une particule?

b) En introduisant des coordonnées normales $q_{1,2}$ (voir formules (5) du problème précédent), on peut présenter la fonction de Lagrange sous la forme

$$L = L_1(q_1, \dot{q}_1) + L_2(q_2, \dot{q}_2),$$

$$L_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4} m(\dot{q}_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2 q_{1,2}^2) + q_{1,2} ka(t)$$

(comp. avec formule (6) du problème précédent).

Le problème se ramène donc à la recherche d'oscillations permanentes de deux oscillateurs indépendants sollicités chacun par une force en dents de scie (voir problème 5.19a).

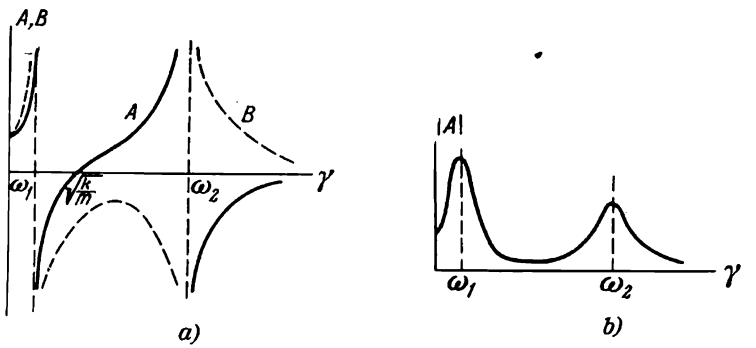


Fig. 122

Il est bien entendu qu'on pouvait aborder la solution du problème du point a) en recourant également aux coordonnées normales (comp. avec problème 6.24).

6.3. Introduisons le système de coordonnées d'origine au point de suspension et dont l'axe y est dirigé suivant la verticale vers le bas. En guise de coordonnées généralisées, choisissons les coordonnées x_1 et x_2 des points A et B. Dans l'expression de l'énergie potentielle $U = -mgy_1 - mgy_2$ substituons $y_1(x_1)$ et $y_2(x_1, x_2)$ à la précision de second ordre en $x_{1,2}/l$ près:

$$y_1 = \sqrt{4l^2 - x_1^2} \approx 2l - \frac{x_1^2}{4l},$$

$$y_2 = y_1 + \sqrt{l^2 - (x_2 - x_1)^2} \approx 3l - \frac{x_1^2}{4l} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{2l}.$$

tandis que dans l'énergie cinétique $T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$ on substitue $\dot{y}_1$ et $\dot{y}_2$ avec la précision du premier ordre près:

$$\dot{y}_1 = -\frac{x_1\dot{x}_1}{2l} \approx 0,$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \frac{(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{l} \approx 0.$$

Après quoi la fonction de Lagrange

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mg}{2l}x_1^2 - \frac{mg}{2l}(x_2 - x_1)^2 + 5\,mgl$$

coïncide avec la fonction de Lagrange du système étudié au problème 6.1, si l'on admet que $k = mg/l$ et on néglige la constante $5mgl$

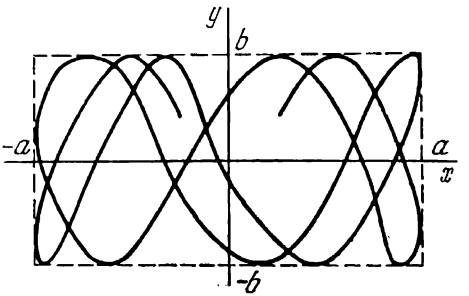


Fig. 123

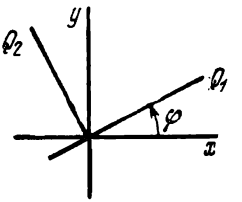


Fig. 124

de peu d'importance. Aussi la dépendance trouvée dans le problème 6.1 entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$ se vérifie-t-elle également pour le pendule double.

Si le point de suspension du pendule se meut suivant la loi $x_0 = a(t) \ll l$, alors, comme il est aisé de se convaincre, on revient à la fonction de Lagrange étudiée au problème 6.2.

6.4. La loi du mouvement est

$$x = a\cos(\omega_1 t + \varphi), \quad y = b\cos(\omega_2 t + \psi).$$

Les constantes $[a, b, \varphi, \psi]$ se déterminent d'après les conditions initiales. La trajectoire s'insère à l'intérieur d'un rectangle (fig. 123):

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b.$$

En principe, la trajectoire « remplit » tout le rectangle. Plus précisément, si ω_1 et ω_2 sont incommensurables, elle passe aussi près que l'on veut de tout point de ce rectangle. Le mouvement du point dans ce cas n'est pas périodique (bien que le mouvement de sa projection sur les axes de coordonnées soit périodique). Si, par contre,

ω_1 et ω_2 sont commensurables ($l\omega_1 = n\omega_2$, où l et n sont des nombres entiers), la trajectoire est une courbe fermée appelée figure de Lissajous. Le mouvement est dans ce cas périodique de période égal à $2\pi n/\omega_1$.

6.5. a) Pour le système donné, le passage aux coordonnées normales est tout simplement une rotation dans le plan (x, y) (fig. 124):

$$x = Q_1 \cos\varphi - Q_2 \sin\varphi, \quad y = Q_1 \sin\varphi + Q_2 \cos\varphi. \qquad (1)$$

En effet, l'énergie cinétique ne varie pas de forme dans la rotation, tandis que dans l'énergie potentielle le coefficient rattaché $Q_1 \cdot Q_2$, égal à

$$-\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2)\sin 2\varphi - \alpha\cos 2\varphi,$$

peut être annulé si l'on définit le paramètre φ à partir de la condition

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\alpha}.$$

La figure 125 montre la dépendance de φ de ω_1; l'étendue du domaine de pulsations au sein duquel s'effectue le passage de $\varphi = 0$ à $\varphi = \pi/2$ est de l'ordre de α/ω_2.

Si la liaison est faible, $\alpha \ll |\omega_1^2 - \omega_2^2|$, les oscillations naturelles sont localisées, c'est-à-dire si $\omega_1 < \omega_2$, il s'avère que $\varphi \approx 0$

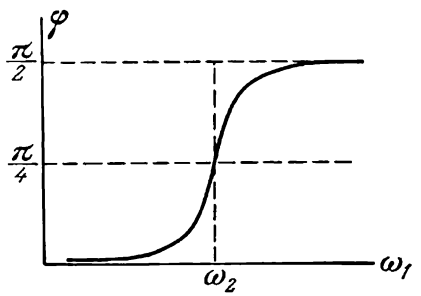


Fig. 125

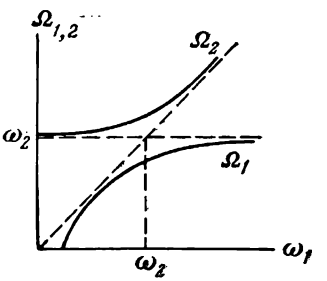


Fig. 126

et $x \approx Q_1$, $y \approx Q_2$, tandis que si $\omega_1 > \omega_2$, on obtient $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ et $x \approx -Q_2$, $y \approx Q_1$.

Pour $|\omega_1^2 - \omega_2^2| \ll \alpha$, les oscillations naturelles cessent d'être localisées: $\varphi \approx \frac{\pi}{4}$, $x \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$, $y \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2)$ (voir [1], § 23, problème 1).

Les pulsations normales

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2 \mp \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4\alpha^2}\right] \qquad (2)$$

se disposent en dehors de l'intervalle des pulsations partielles *), c'est-à-dire que $\Omega_1 < \omega_1$ et $\Omega_2 > \omega_2$ (pour concrétiser, posons $\omega_1 < \omega_2$). Les relations semblables des systèmes à plusieurs degrés de liberté sont connues sous le nom de « théorèmes de Rayleigh » (voir [15] et problème 6.23).

La figure 126 montre la dépendance de $\Omega_{1,2}$ de ω_1. On y voit que la différence entre les pulsations normales $\Omega_{1,2}$ et les pulsations partielles $\omega_{1,2}$ (de même qu'entre les coordonnées normales Q_1, Q_2 et les coordonnées x, y) pour des α petits est partout insensible, à l'exception du domaine de dégénérescence $|\omega_1^2 - \omega_2^2| \leqslant \alpha$. Pour des ω_1 suffisamment petits, l'une des pulsations normales devient imaginaire, le système cessant d'être stable.

En coordonnées Q_1 et Q_2 la loi de mouvement et la trajectoire sont identiques au problème précédent.

b) Les coordonnées normales peuvent être obtenues dans ce cas, en partant des résultats du problème précédent, par simple substitution $\omega_{1,2}^2 \to m_{1,2}$, les pulsations normales du problème étant des inverses de celles de $\Omega_{1,2}$ du problème précédent. Dites pourquoi?

Peut-on déceler l'indépendance des pulsations normales du signe de α (ou de β) d'après le seul aspect de la fonction de Lagrange, sans rechercher la forme explicite de $\Omega_{1,2}$?

6.6. a) La fonction de Lagrange du système (voir problème 4.22) est

$$L = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1\dot{q}_1^2 + \mathcal{L}_2\dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}\left[\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1+q_2)^2}{C}\right],$$

où q_1 et q_2 sont les charges des armatures supérieures des condensateurs C_1 et C_2. En introduisant de nouvelles variables $\sqrt{\mathcal{L}_1}q_1 = x$ et $\sqrt{\mathcal{L}_2}q_2 = y$, on obtient la fonction de Lagrange du problème 6.5a aux paramètres

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\mathcal{L}_1}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{1}{\mathcal{L}_2}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_2}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{C\sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}}.$$

b) Par changement de variables $q_1 = \sqrt{C_1}x$, $q_2 = \sqrt{C_2}y$ on peut transformer la fonction de Lagrange du système donné en fonction de Lagrange du problème 6.5b aux paramètres

$$m_{1,2} = (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{1,2})C_{1,2}, \quad \beta = \mathcal{L}\sqrt{C_1C_2}.$$

Est-ce que ces systèmes peuvent devenir instables?

*) Selon la définition de Mandelstam [7], que l'on adopte ici, la pulsation partielle est la pulsation du système qu'on obtient en partant de la pulsation primitive en posant $x \equiv 0$ (ou $y \equiv 0$).

6.7. Soient x_1 et x_2 les écarts des particules m_1 et m_2 de la position d'équilibre. La substitution $\sqrt{m_1}x_1 = x$ et $\sqrt{m_2}x_2 = y$ effectuée, on obtient la fonction de Lagrange du système étudié au problème 6.5a.

Dans différents cas limites la réponse peut être obtenue sans procéder à la résolution des équations. Par exemple, si tous les $k_i = k$ et $m_i \ll m_2$, l'oscillation naturelle peut être de très basse fréquence $\Omega_1^2 = \frac{3k}{2m_2}$, $x_1 = \frac{1}{2}x_2$ (la particule m_1 ne constituant qu'un élément du ressort, quant à la particule m_2, elle oscille entre les ressorts de rigidité $\frac{1}{2}k$ à gauche et k à droite) et de très haute fréquence $\Omega_2^2 = \frac{2k}{m_1}$ (quand la particule m_2 est, pour ainsi dire, au repos). L'amplitude d'oscillations de la seconde particule peut être obtenue en assimilant son mouvement à un mouvement excité sous l'action de la force imposée kx_1 de haute fréquence (voir [1], formule (22.4)):

$$x_2 = -\frac{m_1}{2m_2}x_1.$$

Il est intéressant d'étudier de façon analogue les cas suivants:

a) $m_1 = m_2$, $k_1 = k_2 \ll k_3$;

b) toutes les rigidités sont différentes mais du même ordre de grandeur, tandis que $m_1 \ll m_2$;

c) $k_2 \gg k_1 = k_3$, les masses m_1 et m_2 étant du même ordre de grandeur.

6.8. a) $x_{1,2} = \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t \pm \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right)$;

pour $k_1 \ll k$ les oscillations constituent des battements:

$$x_1 = \frac{v}{\omega}\cos\varepsilon t\cdot\sin\omega t,$$

$$x_2 = -\frac{v}{\omega}\sin\varepsilon t\cdot\cos\omega t.$$

b) $x_{1,2} = \frac{a}{2}(\cos\omega_1 t \pm \cos\omega_2 t)$; pour $k_1 \ll k$

$$x_1 = a\cos\varepsilon t\cdot\cos\omega t,\quad x_2 = a\sin\varepsilon t\cdot\sin\omega t.$$

Partout $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{2k_1+k}{m}$.

$$\varepsilon = \frac{k_1}{2k}\omega_1,\quad \omega = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2).$$

6.9. L'énergie transmise de la première particule à la seconde durant le temps dt est égale au travail développé par la force $F =$

$= k(x_1 - x_2)$

$$dE = k(x_1 - x_2)\,dx_2 = k(x_1 - x_2)\,\dot{x}_2\,dt,$$

tandis que le flux d'énergie est $\frac{dE}{dt} = k(x_1 - x_2)\,\dot{x}_2$. Pour le cas limite $k_1 \ll k$ du problème 6.8a le flux d'énergie, considéré comme la moyenne sur la période des oscillations rapides, est égal à $\frac{mv^2}{4}\,\omega_1 \sin 2\varepsilon t$ et change de signe quand la pulsation devient double de celle du battement.

6.10. Les équations de mouvement

$$m\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + kx_1 + \alpha\dot{x}_1 = 0,$$
$$m\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + kx_2 + \alpha\ddot{x}_2 = 0;$$

avec la substitution $x_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 \pm q_2)$ se séparent en deux équations aux coordonnées normales

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + 2\lambda\dot{q}_1 = 0,$$
$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + 2\lambda\dot{q}_2 = 0,$$

où $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m}$, $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$. Donc pour $\lambda < \omega_{1,2}$ (voir [1], § 25), on a

$$x_{1,2} = e^{-\lambda t}[a\cos(\gamma_1 t + \varphi_1) \pm b\cos(\gamma_2 t + \varphi_2)],$$

où $\gamma_{1,2} = \sqrt{\omega_{1,2}^2 - \lambda^2}$.

Pour le système représenté sur la figure 22 l'équation caractéristique, en cas de frottement, n'est pas bicarrée mais à puissance quatre, aussi est-il plus difficile d'obtenir les oscillations libres.

6.11. La fonction de Lagrange d'un pendule double

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{Mg}{2l}x_1^2 - \frac{mg}{2l}[x_1^2 + (x_2 - x_1)^2],$$

où x_1 et x_2 sont les écarts des points M et m de la verticale passant par le point de suspension (comp. avec problème 6.3). Après substitution

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{M}}, \quad x_2 = \frac{y}{\sqrt{m}},$$

la fonction de Lagrange se ramène à la forme étudiée dans le problème 6.5a, avec

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 \equiv \frac{2mg}{Ml} \ll \alpha \equiv \frac{g}{l}\sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Dans ce cas

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1-Q_2),\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1+Q_2),$$

où $Q_i=a_i\cos\Omega_i t+b_i\sin\Omega_i t$,

$$\Omega_{1,2}=\sqrt{\frac{g}{l}}\mp\frac{\gamma}{2},\quad \gamma=\sqrt{\frac{mg}{Ml}}.$$

En tenant comte des conditions initiales $Q_{1,2}(0)=\frac{l\beta\sqrt{m}}{\sqrt{2}}$, $\dot{Q}_{1,2}(0)=$ $=0$, il vient

$$x_1=l\beta\sqrt{\frac{m}{M}}\sin\gamma t\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

$$x_2=l\beta\cos\gamma t\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Donc, les pendules oscillent « alternativement », l'amplitude du pendule supérieur étant $\sqrt{M/m}$ fois plus petite que celle du pendule inférieur.

6.12. $x_1=\frac{ak(k_1+k-m\gamma^2)}{m^2(\gamma^2-\omega_1^2)(\gamma^2-\omega_2^2)}\cos\gamma t,$

$$x_2=\frac{akk_1}{m^2(\gamma^2-\omega_1^2)(\gamma^2-\omega_2^2)}\cos\gamma t,$$

où $\omega_1^2=\frac{k}{m}$, $\omega_2^2=\frac{k+2k_1}{m}$.

6.13. $x_1=x_2=\frac{ak}{k-m\gamma^2}\cos\gamma t$, où x_i est l'écartement sur l'anneau de la position d'équilibre de l'i-ième particule. La résonance n'est possible que sur l'une des pulsations normales pour $\gamma^2=k/m$ (voir problème 6.24).

6.14. Soit x_i l'écartement le long de l'anneau de la position d'équilibre de l'i-ième particule, alors

$$x_1=x_3=\frac{ak(\omega_2^2-\gamma^2)}{m(\gamma^2-\omega_1^2)(\gamma^2-\omega_3^2)}\cos\gamma t,$$

$$x_2=\frac{2ak^2}{m^2(\gamma^2-\omega_1^2)(\gamma^2-\omega_3^2)}\cos\gamma t,$$

où les pulsations propres ω_i sont respectivement égales à $\omega_{1,3}^2=$ $=(2\mp\sqrt{2})\frac{k}{m}$, $\omega_2^2=\frac{2k}{m}$. Notons que pour $\gamma=\omega_2$ les écarts $x_1=x_3=0$, tandis que $x_2=-a\cos\gamma t$. Pourquoi le nombre de résonance dans le système est inférieur à celui des pulsations normales ?

6.15. Les équations de mouvement (comp. avec problème 6.12) sont

$$m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x} + kx_1 + k_1(x_1 - x_2) = ka \operatorname{Re} e^{i\gamma t},$$

$$m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + kx_2 + k_1(x_2 - x_1) = 0.$$

Cherchons la solution sous forme $x_1 = \operatorname{Re} Ae^{i\gamma t}$, $x_2 = \operatorname{Re} Be^{i\gamma t}$. On obtient pour A et B les équations

$$(-m\gamma^2 + 2\,im\lambda\gamma + k + k_1)\,A - k_1 B = ka,$$

$$-k_1 A + (-m\gamma^2 + 2\,im\lambda\gamma + k + k_1)\,B = 0, \quad 2m\lambda = \alpha,$$

soit

$$A = \frac{ak\,(k + k_1 - m\gamma^2 + 2i\lambda m\gamma)}{m^2\,(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_1^2)\,(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_2^2)},$$

$$B = \frac{akk_1}{m^2\,(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_1^2)\,(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_2^2)},$$

$$x_1 = \frac{ak\sqrt{\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}\cos(\gamma t + \varphi_1 + \varphi_2 + \psi)}{m\sqrt{[(\gamma^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]\,[(\gamma^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]}},$$

$$x_2 = \frac{akk_1\cos(\gamma t + \varphi_1 + \varphi_2)}{m^2\sqrt{[(\gamma^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]\,[(\gamma^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]}},$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m}, \quad \operatorname{tg}\varphi_{1,2} = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_{1,2}^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{4\lambda\gamma}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\gamma^2}.$$

Il apparaît entre les oscillations de deux particules un décalage de phases ψ ; les oscillations de la première particule ne s'amortissent pas complètement. L'amplitude des oscillations, étant une fonction de la fréquence de la force imposée γ, possède un ou deux maximums suivant le rapport entre les paramètres ω_1, ω_2 et λ (voir [16], § 1).

6.16. La fonction de Lagrange du système (x et y étant des écarts de la première et de la seconde particule de la position d'équilibre)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{k_1 + k_2}{m}x^2 - \frac{k_2 + k_3}{m}y^2 + \frac{2k_2}{m}xy\right) + k_1 ax\cos\gamma t$$

ne diffère de la fonction de Lagrange étudiée au problème 6.5a que par le terme $xk_1 a\cos\gamma t$, répondant à la force $k_1 a\cos\gamma t$, qui agit sur la première particule. On utilisera plus loin les notations du problème 6.5a. La pulsation partielle $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_{1,3} + k_2}{m}}$ correspond à la pulsation normale du système qu'on obtient en fixant la seconde (ou la première) particule dans la position d'équilibre, c'est-à-dire en posant $y = 0$ (ou, respectivement, $x = 0$). En passant aux coordonnées normales Q_1, Q_2, la fonction de Lagrange prend la forme

$$L = \frac{m}{2}(\dot{Q}_1^2 - \Omega_1^2 Q_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \Omega_2^2 Q_2^2) + (F_1 Q_1 + F_2 Q_2)\cos\gamma t,$$

où $F_1 = k_1 a \cos \varphi$ et $F_2 = -k_1 a \sin \varphi$ sont des projections de l'amplitude de la force $F = k_1 a \cos \gamma t$ sur les coordonnées normales Q_1 et Q_2 (fig. 127). Pour la coordonnée $Q_{1,2}$ on obtient l'équation de mouvement de l'oscillateur de pulsation $\Omega_{1,2}$ sollicité par la force imposée $F_{1,2} \cos \gamma t$. Les conditions initiales sont $Q_i(0) = \dot{Q}_i(0) = 0$. Soit

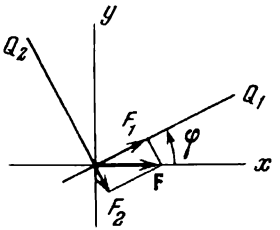


Fig. 127

$$Q_{1,2} = \frac{F_{1,2}(\cos \gamma t - \cos \Omega_{1,2} t)}{m(\Omega_{1,2}^2 - \gamma^2)}.$$

Pour ce système dans l'approche de faible liaison

$$\frac{k_2}{k_3 - k_1} \equiv \varepsilon \ll 1$$

(à des fins de concrétisation, posons $k_1 \ll k_3$) il est intéressant d'étudier la résonance à la seconde pulsation normale. En posant $\gamma = \Omega_2 (1 + \varepsilon_1)$, il vient

$$Q_1 = \frac{k_1 a}{k_1 - k_3} (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t),$$

$$Q_2 = -\frac{k_1 a \varepsilon}{m \omega_2^2 \varepsilon_1} \sin \left(\varepsilon_1 \frac{\omega_2}{2} t\right) \sin \omega_2 t \quad \text{pour } |\varepsilon_1| \ll 1,$$

$$Q_2 = -\frac{k_1 a}{2 m \omega_2} \varepsilon t \sin \omega_2 t \qquad \text{pour } \varepsilon_1 = 0.$$

Donc, même au cas d'une faible liaison, l'amplitude Q_2 peut être grande ou croître dans le temps, toutefois, la vitesse de sa variation sera dans ce cas petite. L'angle de rotation étant petit ($\sin \varphi = \varepsilon$), on obtient pour l'écartement $x = Q_1 - \varepsilon Q_2$ et $y = Q_2$.

Quelle est la vitesse d'accroissement de l'amplitude d'oscillations lorsqu'il y a résonance à la première pulsation $\gamma = \Omega_1$?

Comment variera la nature des oscillations si les deux particules éprouvent un faible frottement proportionnel à la vitesse (comp. avec problème 5.11) ?

6.17. *a*) $x = \frac{F_0 \cos \varphi}{m(\omega_1^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t$, $y = \frac{F_0 \sin \varphi}{m(\omega_2^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t$, où $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}$, $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, φ étant l'angle entre la direction de la force et l'axe AB, tandis que x et y sont les écartements de la position d'équilibre sur les axes AB et CD. La particule oscille sur la droite passant par le centre.

Il est remarquable que pour $\gamma^2 = \omega_1^2 \sin^2 \varphi + \omega_2^2 \cos^2 \varphi$ cette droite est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{F}_0$. Dans ce cas le travail de la force imposée est nul. Aussi, la présence même d'un faible frottement devrait-elle entraîner l'amortissement des oscillations. En est-il ainsi ?

b) $x = \frac{F}{m(\omega_1^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t$, $y = \frac{F}{m(\omega_2^2 - \gamma^2)} \sin \gamma t$. La trajectoire est une ellipse aux demi-axes $a = \frac{F}{m|\omega_1^2 - \gamma^2|}$ et $b = \frac{F}{m|\omega_2^2 - \gamma^2|}$. Si les grandeurs $(\omega_1^2 - \gamma^2)$ et $(\omega_2^2 - \gamma^2)$ sont de signes opposés, le mouvement de la particule sur l'ellipse s'effectue dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre, tandis que le vecteur force tourne dans le sens opposé.

Comment varie la situation décrite plus haut du mouvement de la particule, si la tension des ressorts en position d'équilibre n'est pas nulle ?

6.18. Soit x_i l'écartement de l'i-ième particule sur l'anneau de la position d'équilibre. Trois particules peuvent évoluer le long de l'anneau à une vitesse angulaire constante, avec

$$x_1 = x_2 = x_3 = Ct + C_1 = q_1(t), \quad \omega_1 = 0. \tag{1}$$

Quant aux oscillations de même amplitude des particules *1* et *2* l'une à l'encontre de l'autre

$$x_1 = -x_2 = A \cos(\omega_2 t + \alpha) = q_2(t), \quad x_3 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \tag{2}$$

elles s'effectuent, vraisemblablement avec la même pulsation que

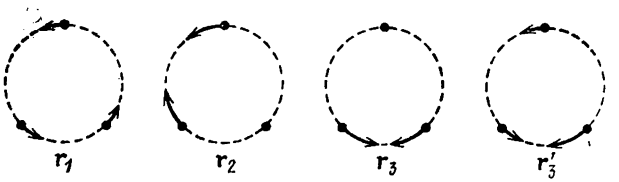


Fig. 128

les oscillations des particules *2* et *3* évoluant l'une à l'encontre de l'autre

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -x_3 = B \cos(\omega_3 t + \beta) = q_3(t), \quad \omega_3 = \omega_2. \tag{3}$$

Introduisons le « vecteur écartement »

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

alors les oscillations (1)-(3) peuvent se représenter sous la forme (fig. 128)

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} q_3. \tag{4}$$

Toute combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{r}_2$ et $\mathbf{r}_3$ constitue également des oscillations de pulsation ω_2. Donc dans l'espace de coordonnées cartésiennes x_1, x_2, x_3 l'ensemble de solutions correspondant aux oscillations de pulsation doublement dégénérée $\omega_2 = \omega_3$ est défini par le plan passant par les vecteurs $\mathbf{r}_2$ et $\mathbf{r}_3$ *). Comme il est aisé de voir de (4), les deux vecteurs (et, par suite, tous les vecteurs situés dans ce plan) sont orthogonaux au vecteur $\mathbf{r}_1$ (pour la relation générale d'orthogonalité voir problème 6.22).

La fonction de Lagrange du système est

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]. \qquad (5)$$

Les coordonnées normales doivent diagonaliser simultanément les deux formes quadratiques, des énergies cinétique et potentielle. Puisque dans (5) l'énergie cinétique est déjà proportionnelle à la somme des carrés de vitesses, le passage de x_i aux coordonnées normales, qui ne modifie pas sa forme, doit être orthogonal, les vecteurs des oscillations naturelles correspondantes étant mutuellement orthogonaux. Les vecteurs $\mathbf{r}_i$ sont indépendants mais ne sont pas orthogonaux l'un à l'autre : $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = 0$, mais $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \neq 0$. Pour obtenir les coordonnées normales, il suffit de choisir dans le plan des vecteurs $\mathbf{r}_2$ et $\mathbf{r}_3$ deux vecteurs mutuellement orthogonaux. Cela peut être, par exemple, le vecteur $\mathbf{r}_2$ et le vecteur $\mathbf{e}q_3$ qui lui est orthogonal, le vecteur unitaire $\mathbf{e}$ s'obtenant à partir de la condition $\mathbf{e}\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}\mathbf{r}_2 = 0$. Bref, l'assortiment de vecteurs normés **)

$$\mathbf{r}_1' = \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{r}_2' = \frac{\mathbf{r}_2}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{r}_3' = \mathbf{e}q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} q_3 \qquad (6)$$

permet de définir les coordonnées normales :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}q_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q_3, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}q_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}q_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

*) Notons que dans ce plan la combinaison linéaire du type $a\mathbf{r}_1(t) + b\mathbf{r}_2(t$ est soit des oscillations sur une droite (pour $\alpha = \beta$, $\beta + \pi$), soit un mouvement suivant une ellipse (pour $\alpha \neq \beta$).

**) Les facteurs $1/\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{2}$ sont introduits à des fins de normalisation des vecteurs $\mathbf{r}_i$ au moyen de la condition $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k = \delta_{ik}q_i^2$ qui rend la transformation (7) orthogonale.

qui réduisent la fonction de Lagrange (5) à la forme

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2 + \dot{q}_3^2 - \omega_3^2 q_3^2). \tag{8}$$

Il est bien entendu que toutes coordonnées obtenues à partir de q_2, q_3 par transformation orthogonale (c'est-à-dire par simple rotation autour de $\mathbf{r}_1$) sont également des coordonnées normales.

6.19. Les conditions initiales de l'écartement x_i sur l'anneau sont

$$x_1(0) = a \quad \text{et} \quad x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_i(0) = 0.$$

En partant de là, on obtient pour les coordonnées normales q_i (voir formule (7) du problème précédent) les conditions initiales:

$$q_1(0) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad q_2(0) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad q_3(0) = \frac{a}{\sqrt{6}}, \quad \dot{q}_i(0) = 0.$$

Donc

$$q_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad q_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 t, \quad q_3 = \frac{a}{\sqrt{6}} \cos \omega_3 t,$$

et, compte tenu de ce que $\omega_2 = \omega_3$, on obtient en définitive

$$x_1 = \frac{a}{3} - \frac{2a}{3} \cos \omega_2 t,$$

$$x_2 = x_3 = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} \cos \omega_3 t.$$

6.20. En se servant des notations du problème 6.18, la fonction de Lagrange du système devient

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2 + 3\dot{x}_3^2) - \frac{k}{2}[2(x_1 - x_2)^2 + \\ + 6(x_2 - x_3)^2 + 3(x_3 - x_1)^2]. \tag{1}$$

Par substitution $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$, les équations de mouvement se réduisent au système de trois équations algébriques:

$$\left.\begin{aligned} (-m\omega^2 + 5k) A_1 - 2kA_2 - 3kA_3 = 0, \\ -2kA_1 + (-2m\omega^2 + 8k) A_2 - 6kA_3 = 0, \\ -3kA_1 - 6kA_2 + (-3m\omega^2 + 9k) A_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ce système admet une solution non triviale si son déterminant est nul:

$$\omega^2 (m\omega^2 - 6k)^2 = 0.$$

De là on tire les pulsations propres du système:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

A la valeur $\omega_1 = 0$ correspond une solution évidente : la rotation sur l'anneau avec la vitesse angulaire constante

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1, \quad q_1(t) = Ct + C_1. \tag{3}$$

Pour les mêmes pulsations $\omega_2 = \omega_3$, dans le système (2) seule l'une des équations demeure indépendante

$$A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 0. \tag{4}$$

Tout assortiment de grandeurs A_i satisfaisant à la condition (4) correspond à des oscillations de pulsation ω_2. En particulier, il est possible de choisir des oscillations pour lesquelles la première, ou la seconde, ou la troisième particule soit au repos :

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_3, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_4, \tag{5}$$

$$q_i = C_i \cos(\omega_2 t + \varphi_i), \quad i = 2, 3, 4.$$

Selon (4) toute combinaison linéaire de vecteurs (5) est orthogonale au vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il est aisé de se convaincre que l'assortiment de vecteurs

$$\mathbf{r}_1, \ \mathbf{r}_2, \ \mathbf{r}_3' = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q_3 \tag{6}$$

permet, comme dans le problème 6.18, de déterminer les coordonnées normales qui transforment la fonction de Lagrange (1) en une forme diagonale. Les vecteurs (6) correspondent non pas à la simple relation d'orthogonalité (comme dans le problème 6.18) mais à la relation d'orthogonalité pondérée (voir problème 6.22).

6.21. Les vecteurs des oscillations naturelles sont :

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_1, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_2,$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} q_3, \qquad \mathbf{r}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_4, \tag{1}$$

$$q_l = A_l \cos(\omega_l t + \varphi_l), \quad l = 1, 2, 3; \quad q_4 = A_4 t + A_5,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La fonction de Lagrange du système est

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 - \omega_1^2 q_1^2 - \omega_2^2 q_2^2 - \omega_3^2 q_3^2).$$

Ce n'est pas évidemment l'unique choix. Tous vecteurs obtenus à partir des vecteurs donnés par rotation dans le plan défini par les vecteurs $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ seront également des vecteurs d'oscillations naturelles, par exemple:

$$\mathbf{r}_1' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} q_1', \quad \mathbf{r}_2' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q_2', \quad \mathbf{r}_3' = \mathbf{r}_3 \quad \mathbf{r}_4' = \mathbf{r}_4 \tag{2}$$

(rotation de $\pi/4$). Toutefois, les vecteurs $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2'$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$, bien qu'indépendants, ne réduisent pas la fonction de Lagrange à une somme de carrés.

6.22. Les amplitudes des oscillations naturelles satisfont aux équations

$$-\omega_l^2 \sum_j m_{ij} A_j^{(l)} + \sum_j k_{ij} A_j^{(l)} = 0, \tag{1}$$

$$-\omega_s^2 \sum_j m_{ij} A_j^{(s)} + \sum_j k_{ij} A_j^{(s)} = 0, \tag{2}$$

Multiplions l'équation (1) par $A_j^{(s)}$ et l'équation (2) par $A_i^{(l)}$. En faisant dans les deux équations la somme des termes en i, il vient

$$-\omega_l^2 \sum_{ij} m_{ij} A_j^{(l)} A_i^{(s)} + \sum_{ij} k_{ij} A_j^{(l)} A_i^{(s)} = 0, \tag{3}$$

$$-\omega_s^2 \sum_{ij} m_{ij} A_j^{(s)} A_i^{(l)} + \sum_{ij} k_{ij} A_j^{(s)} A_i^{(l)} = 0. \tag{4}$$

Enlevons l'équation (4) de l'équation (3), compte tenu de ce que $m_{ij} = m_{ji}$ et $k_{ij} = k_{ji}$, et l'on obtient:

$$(\omega_s^2 - \omega_l^2) \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(l)} = 0,$$

autrement dit, si $\omega_s \neq \omega_l$,

$$\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(l)} = 0, \tag{5}$$

et de même, en partant de (3), il vient

$$\sum_{ij} k_{ij} A_j^{(s)} A_i^{(l)} = 0. \tag{6}$$

Il est commode de profiter de la terminologie utilisée en algèbre linéaire. Le groupe d'amplitudes de l'oscillation considérée sera appelé vecteur d'amplitude $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \ldots, A_N^{(l)})$. Les relations démontrées (5) et (6) signifient que les amplitudes $\mathbf{A}^{(s)}$ et $\mathbf{A}^{(l)}$ sont mutuellement orthogonales au cas où le produit scalaire est déterminé au moyen de tenseurs métriques m_{ij} ou k_{ij}.

En cas de dégénérescence (si $\omega_s = \omega_l$) les amplitudes $\mathbf{A}^{(s)}$ et $\mathbf{A}^{(l)}$ ne doivent pas obligatoirement satisfaire aux relations (5) et (6). Mais dans ce cas il est toujours possible de choisir, et cela de diverses façons, des amplitudes satisfaisant à (5) et (6) et réduire la fonction de Lagrange à une somme de carrés.

6.23. En passant aux coordonnées normales

$$x_i = \sum_l A_i^{(l)} q_l,$$

transformons l'équation de liaison

$$\sum_l b_l q_l = 0, \quad b_l = \sum_i a_i A_i^{(l)}$$

Les équations de mouvement à facteur indéterminé de Lagrange λ

$$M_l (\ddot{q}_l + \Omega_l^2 q_l) = b_l \lambda$$

peuvent être résolues en posant

$$q_l = C_l \cos(\omega t + \varphi), \quad \lambda = \Lambda \cos(\omega t + \varphi).$$

En exprimant C_l sur la base de l'équation

$$M_l (\Omega_l^2 - \omega^2) C_l = b_l \Lambda$$

et en reportant dans l'équation de liaison, on obtient pour les nouvelles pulsations l'équation

$$\Lambda \sum_l \frac{b_l^2}{M_l (\Omega_l^2 - \omega^2)} = 0.$$

Pour l'étude de cette équation, il est commode de se servir du graphique (fig. 129)

$$y(\omega^2) = \sum_l \frac{b_l^2}{M_l (\Omega_l^2 - \omega^2)}.$$

Remarquons que la fonction $y(\omega^2)$ change de signe en passant par la valeur infinie pour $\omega^2 = \Omega_l^2$. Après quoi la disposition des racines ω_l devient évidente. Si l'un quelconque des paramètres b_l s'annule, l'oscillation naturelle correspondante (ainsi que sa pulsation) ne varie pas avec l'imposition d'une liaison.

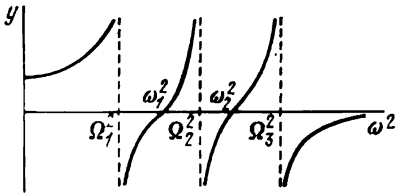


Fig. 129

Le phénomène étudié dans ce problème reçoit une interprétation géométrique fort simple (voir [6], § 24).

6.24. En reportant $x_j = \sum_l \lambda^{(l)} A_j^{(l)} \cos \gamma t$ dans les équations de mouvement

$$\sum_j m_{ij}\ddot{x}_j + \sum_j k_{ij}x_j = f_i \cos \gamma t,$$

on obtient le système suivant d'équations permettant de déterminer les coefficients de $\lambda^{(l)}$:

$$-\gamma^2 \sum_{j,l} m_{ij}\lambda^{(l)}A_j^{(l)} + \sum_{j,l} k_{ij}\lambda^{(l)}A_j^{(l)} = f_i. \qquad (2)$$

Le plus simple est de le résoudre en partant des relations d'orthogonalité (5), (6) du problème 6.22.

Pour cela multiplions les équations (2) par $A_i^{(s)}$ et, en sommant en i, on obtient en définitive

$$\lambda^{(s)} = \frac{F_s}{M_s(\omega_s^2 - \gamma^2)},$$

ùo

$$F_s = \sum_i A_i^{(s)} f_i, \quad M_s = \sum_{i,j} m_{ij}A_i^{(s)}A_j^{(s)}, \quad K_s = \sum_{i,j} k_{ij}A_i^{(s)}A_j^{(s)},$$

la grandeur $\omega_s^2 = K_s/M_s$ étant la s-ième pulsation normale du système en conformité avec la formule (4) du problème 6.22 *). La dépendance de $\lambda^{(s)}$ de γ est de nature d'une résonance.

*) Au cas où certaines pulsations normales sont dégénérées, on admet que les amplitudes d'oscillations naturelles qui leur correspondent ont été choisies de manière à satisfaire aux relations d'orthogonalité (5) et (6) du problème 6.22.

Pour les oscillations naturelles q_s, introduites suivant la formule

$$x_i = \sum_s A_i^{(s)} q_s(t), \tag{3}$$

on obtient, au lieu de (1), les équations de mouvement suivantes:

$$M_s \ddot{q}_s + K_s q_s = F_s \cos \gamma t. \tag{4}$$

De là, si le vecteur force f_i est orthogonal à l'amplitude de la s-ième oscillation naturelle $\sum_i A_i^{(s)} f_i = 0$, il s'ensuit que la coordonnée normale correspondante satisfait à l'équation des oscillations libres et la résonance pour cette pulsation, au cas où $\omega = \omega_s$, ne se manifeste pas.

Notons que le travail de la force extérieure est dans ce cas nul $\left(\sum_i f_i\, dx_i = \sum_i f_i A_i^{(s)}\, dq_s = 0\right)$.

Supposons que le vecteur force est parallèle à une oscillation naturelle quelconque: $\frac{f_i}{A_i^{(s)}} = \text{const}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Est-ce que cette force est en mesure d'engendrer d'autres oscillations naturelles?

6.25. Les oscillations permanentes entretenues peuvent être représentées sous la forme (voir problème précédent)

$$x_i = \sum_j \beta_{ij} f_j,$$

où

$$\beta_{ij} = \sum_l \frac{A_i^{(l)} A_j^{(l)}}{M_l(\omega_l^2 - \gamma^2)}.$$

Le théorème de réciprocité implique que $\beta_{ij} = \beta_{ji}$.

Quelle sera la forme de l'énoncé de ce théorème au cas où les coordonnées x_i et x_j possèdent des dimensions différentes (par exemple, dans le cas d'un système électromécanique)?

6.26. Les oscillations naturelles sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_3, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -m/M \\ 1 \\ -m/M \end{pmatrix} q_4,$$

où $q_1 = At + B$, $q_i = A_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$, $i = 2, 3, 4$: $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$, $\omega_3^2 = \frac{2k}{M}$, $\omega_4^2 = \frac{2k(M+m)}{mM}$. Les trois premières oscillations se devinent aisément, tandis que la dernière s'obtient de la condition d'orthogonalité aux trois premières. Comme les masses des particules sont

différentes, la condition d'orthogonalité des deux oscillations naturelles **A** et **B** a la forme $mA_1B_1 + MA_2B_2 + mA_3B_3 + MA_4B_4 = 0$ (voir problème 6.22).

6.27. Soit x_i l'écartement de l'i-ième particule sur l'anneau. Deux oscillations naturelles se devinent aisément. Ce sont

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1(t), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2(t), \tag{1}$$

$$q_1(t) = C_1 t + C_2, \quad q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}.$$

Les deux autres vecteurs doivent être orthogonaux aux vecteurs (1) en métrique définie par les coefficients de forme quadratique de l'énergie cinétique (voir problème 6.22), c'est-à-dire avoir l'aspect

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ -a - \frac{b}{2} \end{pmatrix} q(t). \tag{2}$$

En portant (2) dans les équations de mouvement de la première et de la seconde particule

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_4 - x_2) = 0, \quad m\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0,$$

on obtient les équations permettant de trouver les grandeurs a, b ainsi que des pulsations

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + 3k)\,a - \frac{k}{2}\,b &= 0, \\ -2ka + (-m\omega^2 + 2k)\,b &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

De (3) on tire $\omega_{3,4}^2 = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$, $b_{3,4} = (1 \pm \sqrt{5})\, a_{3,4}$ ou

$$\mathbf{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm \sqrt{5} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} q_{3,4}(t),$$

$$q_{3,4} = A_{3,4} \cos(\omega_{3,4} t + \varphi_{3,4}).$$

6.28. a) Soient x_i, y_i, z_i l'écartement de l'i-ième particule de la position d'équilibre. La fonction de Lagrange du système prend la

forme (voir problème 5.7)

$$L = L_1(x, \dot{x}) + L_1(y, \dot{y}) + L_1(z, \dot{z}),$$

$$L_1(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{x}_5^2) -$$

$$- \frac{k}{2}[x_1^2 + (x_1 - x_5)^2 + (x_5 - x_3)^2 + x_3^2 + x_2^2 +$$

$$+ (x_2 - x_5)^2 + (x_5 - x_4)^2 + x_4^2],$$

aussi les oscillations suivant x, y et z s'effectuent-elles indépendamment. Il est aisé de deviner que les oscillations naturelles suivant x sont :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} q_1, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_3, \tag{1}$$

$$q_i = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Les deux autres oscillations naturelles doivent être orthogonales aux vecteurs (1) et prennent donc la forme *)

$$\mathbf{r}_{4,5} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ d \end{pmatrix} q_{4,5}. \tag{2}$$

En portant ce vecteur dans les équations de mouvement de la première et de la seconde particule

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_5) = 0,$$

$$m\ddot{x}_5 + k(4x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = 0,$$

on obtient deux équations permettant de déterminer a, d et les pulsations $\omega_{4,5}$:

$$(-\omega^2 m + 2k)\, a - kd = 0,$$

$$-4ka + (-m\omega^2 + 4k)\, d = 0. \tag{3}$$

---

*) Soit $\mathbf{r}_{4,5} = (a, b, c, e, d) \equiv \mathbf{r}$, les conditions d'orthogonalité $(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = 0$ fournissent alors les relations $a = b = c = e$.

En résolvant (3), on trouve

$$\omega_{4,5}^2 = (3 \mp \sqrt{5})\frac{k}{m} \quad \text{et} \quad d_{4,5} = (-1 \pm \sqrt{5})\, a_{4,5}.$$

En définitive

$$\mathbf{r}_{4,5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix} q_{4,5}. \tag{4}$$

Pour des oscillations sur les axes y et z on obtient des résultats identiques à ceux des oscillations le long de l'axe x. Il y a donc dans le système rien que trois pulsations différentes : $\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$ de dégénérescence nonuple et deux pulsations de dégénérescence triple $\omega_{4,5}^2 = (3 \mp \sqrt{5})\frac{k}{m}$ (pour la levée de la dégénérescence voir problème 6.41).

b) Les oscillations sur l'axe z se devine aisément

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_1, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \\ 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} q_{3,4},$$

$$q_i = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{2f}{ml}}, \quad \omega_4 = \sqrt{\frac{f}{ml}},$$

où f est la tension des ressorts, tandis que l est la longueur d'un ressort en position d'équilibre.

Si $f = kl$, les oscillations en direction de l'axe x (ou y) ont l'aspect identique à celui en direction de l'axe z au cas où l'on considère $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ (ou $\mathbf{r} = (y_2, y_1, y_4, y_3)$). Si, par contre, $f \neq kl$, la dégénérescence est alors levée. Deux oscillations naturelles de pulsations $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{2f}{ml}}$ coïncident avec $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. Les deux autres, selon la condition d'orthogonalité, doivent prendre l'aspect

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi).$$

Pour les obtenir, il suffit de posséder les équations de mouvement de deux particules

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_5) = 0 \qquad m\ddot{x}_2 + \frac{f}{l}(2x_2 - x_5) = 0.$$

Dans ce cas

$$x_5 = \left[k(x_1 + x_3) + \frac{f}{l}(x_2 + x_4)\right] \Big/ \left(2k + \frac{2f}{l}\right)$$

est la coordonnée du point de connexion des ressorts, qui se détermine à partir de la condition de l'énergie potentielle maximale pour $x_{1,2,3,4}$ donnés.

En résolvant les équations, on obtient

$$\omega_3^2 = \frac{f + kl}{ml}, \quad b_3 = -\frac{f}{kl}\, a_3;$$

$$\omega_4^2 = \frac{2kf}{m(f + kl)}, \quad b_4 = \frac{kl}{f}\, a_4.$$

6.29. Dans ce cas la réponse peut être obtenue par une simple généralisation des résultats du problème 6.20 sans calcul explicite des valeurs des pulsations propres ω_i.

Supposons que le système est affecté d'une dégénérescence: $\omega_1 = 0$, tandis que $\omega_2 = \omega_3$. A la pulsation $\omega_1 = 0$ correspond une rotation de la particule sur l'anneau

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (Ct + C_1).$$

Par suite de la dégénérescence de la pulsation ω_2 tout vecteur

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

satisfaisant à la condition

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0, \tag{2}$$

constitue une oscillation naturelle de pulsation $\omega = \omega_2$. (L'égalité (2) est la condition d'orthogonalité au vecteur $\mathbf{r}_1$ en métrique définie par les coefficients de la forme quadratique de l'énergie cinétique; voir problème 6.22.) En particulier, il est possible de choisir une telle oscillation naturelle (1) pour laquelle la première particule soit au repos:

$$A_1 = 0, \quad m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0. \tag{3}$$

En portant (3) dans les équations de mouvement

$$(m_1\omega^2 - k_2 - k_3)\,A_1 + k_3A_2 + k_2A_3 = 0,$$
$$k_3A_1 + (m_2\omega^2 - k_1 - k_3)\,A_2 + k_1A_3 = 0,$$
$$k_2A_1 + k_1A_2 + (m_3\omega^2 - k_1 - k_2)\,A_3 = 0,$$

on constate immédiatement qu'elles ne possèdent une solution que pour

$$k_3A_2 + k_2A_3 = 0. \tag{4}$$

En comparant (3) à (4), on trouve que $m_2k_2 = m_3k_3$. En répétant ces raisonnements pour les cas où, au repos, se trouve la seconde ou la troisième particule, on constate qu'en cas de dégénérescence de pulsations les coefficients k_i satisfont nécessairement à la condition

$$m_1k_1 = m_2k_2 = m_3k_3. \tag{5}$$

D'autre part, ces raisonnements impliquent que (5) est également la condition suffisante de la dégénérescence des pulsations. En effet, si la condition (5) est remplie, le système possède trois oscillations naturelles différentes aux pulsations non nulles. De ces trois oscillations, en vertu de (2), deux seulement sont linéairement indépendantes. Il s'ensuit donc de façon univoque que les trois oscillations possèdent la même pulsation.

Donc (5) est la condition nécessaire et suffisante de la dégénérescence des pulsations.

6.30. Pour la solution de ce problème il est commode de se servir de la méthode exposée au problème 6.27.

a) Les oscillations naturelles

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(C_1t + C_2), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} A_2\cos(\omega_2t + \varphi_2),$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} A_3\cos(\omega_3t + \varphi_3), \tag{1}$$

$$\omega_2^2 = \frac{(3+2\varepsilon)\,k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{3k}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\delta k}{k}$$

sont proches, pour des ε petits, des oscillations (6) du problème 6.18 : les amplitudes des vecteurs oscillations coïncident, les pulsations demeurent, toutefois, différentes. Aussi, si dans le problème 6.18 toute superposition des vecteurs $\mathbf{r}_2'$ et $\mathbf{r}_3'$ impliquait-elle également des oscillations naturelles, maintenant le choix du vecteur $\mathbf{r}_2$ et $\mathbf{r}_3$ est absolument univoque.

b) Les oscillations naturelles

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 t + C_2), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{2}{1+\varepsilon} \end{pmatrix} A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3), \tag{2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{3+\varepsilon}{1+\varepsilon}\frac{k}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\delta m}{m}$$

sont proches, pour des ε petits, des oscillations (6) du problème 6.18. Si la surcharge était additionnée à la particule 2, les oscillations naturelles

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 t + C_2), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{2}{1+\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

sont proches de la superposition des oscillations naturelles (6) du problème 6.18.

c) $$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 t + C_2),$$

$$\mathbf{r}_{2,3} = \left\{ a_{2,3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_{2,3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cos(\omega_{2,3} t + \varphi_{2,3}),$$

où

$$\frac{b_{2,3}}{a_{2,3}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \mp \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

$$\omega_{2,3}^2 \approx \frac{k}{m}\left(3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mp \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}\right),$$

$$\varepsilon_i = \frac{\delta m_i}{m}.$$

6.31. a) Le vecteur déplacement initial $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ assimilé à une superposition de vecteurs $\mathbf{r}_i$ (voir formule (1) du problème précédent) pris à l'instant origine $t=0$ est de la forme

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1(0) + \mathbf{r}_2(0) + \mathbf{r}_3(0). \tag{1}$$

Représentons de façon analogue le vecteur vitesse initiale

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) + \dot{\mathbf{r}}_2(0) = \dot{\mathbf{r}}_3(0). \tag{2}$$

A partir du système d'équations (1) et (2) on obtient les valeurs suivantes des constantes: $A_2 = A_3 = a/2$, $C_1 = C_2 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ soit

$$\mathbf{r} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix} \cos\omega_2 t + \cos\omega_3 t \\ -\cos\omega_2 t + \cos\omega_3 t \\ -2\cos\omega_3 t \end{pmatrix} \approx a\begin{pmatrix} \cos\frac{\varepsilon\omega_3 t}{6}\cos\omega_3 t \\ \sin\frac{\varepsilon\omega_3 t}{6}\sin\omega_2 t \\ -\cos\omega_3 t \end{pmatrix}.$$

Donc le mouvement des particules *1* et *2* est celui d'un battement dont la pulsation est fonction de la perturbation δk, tandis que la particule *3* participe à une simple oscillation de pulsation ω_3. Soulignons que même une très petite adjonction δk se traduit par une accumulation de variations qui, au bout d'un laps de temps suffisamment grand, deviennent importantes (comp. avec problème 2.36).

6.32. a), b)

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1(t), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} q_2(t), \quad \mathbf{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \\ 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} q_{3,4}(t);$$

c) idem que dans le problème 6.21, formule (1).

6.33.

$$x_{1,2} = -x_{3,4} = \pm\frac{a}{2}\cos\sqrt{\frac{2k+2\delta k}{m}}\,t + \frac{a}{2}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t;$$

les oscillations des particules ont le caractère de battements (voir à ce propos problème 6.31).

6.34. On peut s'attendre à ce que les variations des pulsations et des vecteurs des oscillations naturelles soient minimes et utiliser alors la méthode d'approximations successives. Il est commode de passer alors aux coordonnées normales du système étalon (voir

problème 6.24)

$$x_i = \sum_l A_i^{(l)} q_l.$$

Dans ce cas δL prend la forme

$$\delta L = \frac{1}{2} \sum_{l,\, s} (\delta M_{ls} \dot{q}_l \dot{q}_s - \delta K_{ls} q_l q_s), \tag{1}$$

où

$$\delta M_{ls} = \sum_{i,\, j} \delta m_{ij} A_i^{(l)} A_j^{(s)}, \quad \delta K_{ls} = \sum_{i,\, j} \delta k_{ij} A_i^{(l)} A_j^{(s)}, \tag{2}$$

tandis que les équations de mouvement sont

$$M_l (\ddot{q}_l + \omega_l^2 q_l) = - \sum_s (\delta M_{ls} \ddot{q}_s + \delta K_{ls} q_s). \tag{3}$$

En posant que dans l'approximation zéro seule l'oscillation q_n est amorcée, on peut laisser dans les seconds membres des équations (3) seulement les termes en $s = n$.

Pour déterminer l'adjonction à la pulsation ω_n, il suffit d'écrire la seule équation avec $l = n$:

$$(M_n + \delta M_{nn}) \ddot{q}_n + (M_{nn} \omega_n^2 + \delta K_{nn}) q_n = 0,$$

soit

$$(\omega_n + \delta \omega_n)^2 = \frac{M_{nn} \omega_n^2 + \delta K_{nn}}{M_n + \delta M_{nn}},$$

de sorte que

$$\delta \omega_n = \frac{\delta K_{nn}}{2 \omega_n M_n} - \frac{\omega_n \delta M_{nn}}{2 M_n}. \tag{4}$$

Les équations à $l \neq n$ permettent de trouver les corrections au vecteur de l'oscillation naturelle. Dans ce cas les seconds membres des équations peuvent être pris pour des forces associées de pulsation ω_n. L'excitation d'oscillations q_l, comme on s'y attendait, s'est avérée faible, car ces « forces » sont peu intenses.

On peut également obtenir les approximations suivantes qui précisent les corrections à ω_n et aux vecteurs des oscillations naturelles (voir [13], ch. 1, § 5).

Il est utile de noter que la grandeur δM_{nn} dans (2) est une adjonction au double de l'énergie cinétique du système à condition que les vitesses $\dot{x}_i = A_i^{(n)}$. Il s'ensuit qu'avec l'accroissement des masses des particules $\delta M_{nn} \geqslant 0$ et, partant, selon (4), $\delta \omega_n \leqslant 0$. De façon analogue il est facile de constater qu'avec l'accroissement des coefficients de rigidité des ressorts les pulsations propres ne peuvent qu'augmenter (comp. avec [6], § 24; [15]).

Il importe de comprendre ce qu'il arrivera quand on recherche la correction à une pulsation dégénérée (soit $\omega_p = \omega_n$). Dans ce cas la « force » dans le second membre des équations (3) s'avère de résonance. Aussi la coordonnée q_p croît-elle dans le temps et on doit en tenir compte également dans les seconds membres des équations (3). On doit donc dans ce cas se servir des équations (3) simultanément à $l = n, p$, en ne laissant dans les seconds membres que les termes avec $s = n, p$

$$\begin{aligned} M_n(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) &= -\delta M_{nn}\ddot{q}_n - \delta M_{np}\ddot{q}_p - \delta K_{nn}q_n - \delta K_{np}q_p, \\ M_p(\ddot{q}_p + \omega_p^2 q_p) &= -\delta M_{pn}\ddot{q}_n - \delta M_{pp}\ddot{q}_p - \delta K_{pn}q_n - \delta K_{pp}q_p. \end{aligned} \tag{5}$$

Il est évident que ce qu'on vient de dire se rapporte au cas de $\omega_p \approx \omega_n$.

Bref, pour déterminer les corrections à toutes les pulsations propres (y compris la dégénérescence), dans l'adjonction (1) à la fonction de Lagrange on peut laisser tomber tous les termes contenant les produits des coordonnées normales se rapportant aux différentes pulsations du système étalon.

6.35. Utilisons les notations et les résultats des problèmes 6.27 et 6.34. Il est d'emblée clair que $\delta\omega_1 = 0$. Quant aux autres pulsations

$$\delta\omega_n = -\frac{\omega_n}{2}\frac{\sum\limits_{i,j}(\mathbf{r}_n)_i\,\delta m_{ij}\,(\mathbf{r}_n)_j}{\sum\limits_{i,j}(\mathbf{r}_n)_i\,m_{ij}\,(\mathbf{r}_n)_j}, \quad n = 2,\ 3,\ 4. \tag{1}$$

La matrice de l'énergie cinétique m_{ij} est diagonale, avec

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m, \quad m_{44} = 2m. \tag{2}$$

La matrice δm_{ij} a un seul élément différant de zéro

$$\delta m_{11} = \delta m. \tag{3}$$

En portant dans (1) les expressions (2) et (3), de même que les composantes des vecteurs d'oscillations naturelles $\mathbf{r}_n$ obtenues au problème 6.27, il vient

$$\delta\omega_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon\omega_2, \quad \delta\omega_{3,4} = -\frac{3\mp\sqrt{5}}{40}\varepsilon\omega_{3,4}.$$

6.36. Le potentiel vecteur est choisi sous la forme

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{H}}{2}(-y,\ x,\ 0),$$

quant à la fonction de Lagrange, elle est

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) + \frac{\omega_{m\mathcal{H}}}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

où $\omega_{\mathscr{H}} = \frac{e\mathscr{H}}{mc}$. On obtient pour x et y les équations

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x - \omega_{\mathscr{H}} \dot{y} = 0,$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y + \omega_{\mathscr{H}} \dot{x} = 0.$$

Il est commode de rechercher les oscillations sous la forme

$$x = \mathrm{Re}\,(Ae^{i\Omega t}), \quad y = \mathrm{Re}\,(Be^{i\Omega t}).$$

Le système d'équations

$$(\omega_1^2 - \Omega^2)\,A - i\omega_{\mathscr{H}}\Omega B = 0,$$

$$i\omega_{\mathscr{H}}\Omega A + (\omega_2^2 - \Omega^2)\,B = 0$$

aboutit aux oscillations

$$x = \mathrm{Re}\,(A_k e^{i\Omega_k t}) = a_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k),$$

$$y = \mathrm{Re}\left(A_k \frac{-i\omega_{\mathscr{H}}\Omega_k}{\omega_2^2 - \Omega_k^2} e^{i\Omega_k t}\right) = a_k \frac{\omega_{\mathscr{H}}\Omega_k}{\omega_2^2 - \Omega_k^2} \sin(\Omega_k t + \varphi_k),$$

$$A_k = a_k e^{i\varphi_k}, \quad k = 1,\ 2,$$

de pulsations

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_{\mathscr{H}}^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_{\mathscr{H}}^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2}\right].$$

Soit, pour plus de netteté, $\omega_1 > \omega_2$, $\omega_{\mathscr{H}} > 0$. Alors la première des oscillations trouvées est un mouvement sur l'ellipse dont le grand axe est dirigé le long de l'axe x dans le sens des aiguilles d'une montre, tandis que la deuxième sur l'ellipse dont le grand axe suit l'axe y, dans le sens opposé.

Le mouvement le long de l'axe z s'avère un mouvement harmonique, indépendant du champ magnétique,

$$z = a_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Le mouvement libre de l'oscillateur constitue une superposition d'oscillations obtenues. Ces oscillations peuvent être appelées naturelles, en généralisant ainsi la notion d'oscillation naturelle: les mouvements en direction des axes x et y s'effectuent avec la même pulsation mais avec un certain déphasage. On ne peut ramener la fonction de Lagrange à la forme diagonale par transformation linéaire des seules coordonnées, vu que le passage aux coordonnées normales implique dans ce cas une transformation canonique (voir problème 11.7-11.9).

a) Si le champ magnétique est faible, $\omega_{\mathscr{H}} \ll \omega_1 - \omega_2$, les ellipses des oscillations naturelles sont très allongées, tandis que les pulsa-

tions $\Omega_{1,2} \approx \omega_{1,2} \pm \frac{\omega_{\mathscr{H}}^2 \omega_{1,2}}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$ sont proches de $\omega_{1,2}$. La trajectoire de l'oscillateur en l'absence de champ magnétique remplit un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (voir problème 6.4); l'influence d'un faible champ magnétique se réduit à une petite déformation du domaine rempli par la trajectoire. (Le théorème de Larmore est ici inapplicable car le champ U est dénué de symétrie par rapport à l'axe z.)

b) Dans un champ magnétique intense $\omega_{\mathscr{H}} \gg \omega_{1,2}$ l'oscillation naturelle de pulsation $\Omega_1 \approx \omega_{\mathscr{H}}$ s'effectue sur un cercle, tandis que l'oscillation naturelle de pulsation $\Omega_2 \approx \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_{\mathscr{H}}}$ sur une ellipse au rapport entre les axes parallèles respectivement à x et y égal à ω_2/ω_1. Il s'effectue donc un mouvement suivant le cercle dont le centre se meut relativement lentement sur une ellipse.

Il est connu qu'avec le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme intense le long d'un plan perpendiculaire au champ, l'apparition d'un faible champ quasi uniforme $U(\mathbf{r})$ (c'est-à-dire tel que la force $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ varie insensiblement sur une orbite proche de la circulaire) s'accompagne d'un lent déplacement (dérive) du centre de l'orbite dans la direction perpendiculaire à $\mathbf{F}$ (c'est-à-dire suivant la ligne de niveau $U(\mathbf{r})$) (voir [2], § 22). Notons que dans le cas considéré une dérive analogue s'observe également dans un champ fortement inhomogène d'un oscillateur.

c) Si $\omega_1 = \omega_2$, les oscillations naturelles dans le plan (x, y) s'effectuent sur un cercle dans des sens opposés avec des pulsations $\Omega_{1,2} = \tilde{\omega} \pm \omega_{\mathscr{H}}/2$, où $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_{\mathscr{H}}^2/4}$. Donc dans le système en rotation avec la pulsation $-\omega_{\mathscr{H}}/2$ les deux pulsations de ces mouvements s'avèrent identiques et égales à $\tilde{\omega}$. Ces mouvements sont des oscillations naturelles d'un oscillateur isotrope de pulsation $\tilde{\omega}$. En effet, la somme et la différence de ces oscillations de mêmes amplitudes

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\omega} t \\ -\sin \tilde{\omega} t \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \cos \tilde{\omega} t \\ \sin \tilde{\omega} t \end{pmatrix}$$

sont des oscillations linéaires suivant les axes x et y. (On néglige la dérive le long du champ magnétique.)

Si le champ magnétique est faible $\omega_{\mathscr{H}} \ll \omega_1$, $\tilde{\omega} \approx \omega_1$, toute l'influence du champ sur le mouvement de l'oscillateur se réduisant à l'apparition d'une rotation (« précession ») autour de l'axe z de pulsation $-\omega_{\mathscr{H}}/2$ (théorème de Larmore, comp. avec [2], § 45). Si,

par contre, $\omega_{\mathscr{H}} \gg \omega_1$, le recours au système en rotation cesse d'être parlant.

6.37. Les équations de mouvement

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \omega_z \dot{y},$$
$$\ddot{y} + \omega_2^2 y = -\omega_z \dot{x} + \omega_x \dot{z},$$
$$\ddot{z} + \omega_3^2 z = -\omega_x \dot{y},$$

où

$$\omega_x = \frac{e\mathscr{H}_x}{mc}, \quad \omega_z = \frac{e\mathscr{H}_z}{mc},$$

se résolvent au moyen d'approximations successives. Cherchons les coordonnées sous la forme $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, $y = y^{(1)} + y^{(2)}$, $z = z^{(1)} + z^{(2)}$, où $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$ sont petits devant $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$. En première approximation, négligeons les petits termes aux seconds membres des équations:

$$x^{(1)} = A \cos(\omega_1 t + \alpha),$$
$$y^{(1)} = B \cos(\omega_2 t + \beta),$$
$$z^{(1)} = C \cos(\omega_3 t + \gamma).$$

Les corrections $x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$ se déterminent à partir des équations

$$\begin{aligned} &\ddot{x}^{(2)} + \omega_1^2 x^{(2)} = \omega_z \dot{y}^{(1)}, \\ &\ddot{y}^{(2)} + \omega_2^2 y^{(2)} = -\omega_z \dot{x}^{(1)} + \omega_x \dot{z}^{(1)}, \\ &\ddot{z}^{(2)} + \omega_3^2 z^{(2)} = -\omega_x \dot{y}^{(1)}. \end{aligned} \tag{1}$$

On obtient

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{-\omega_z \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \beta)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ y^{(2)} &= \frac{\omega_1 \omega_z A \sin(\omega_1 t + \alpha)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} - \frac{\omega_x \omega_3 C \sin(\omega_3 t + \gamma)}{\omega_2^2 - \omega_3^2}, \\ z^{(2)} &= \frac{\omega_x \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \beta)}{\omega_3^2 - \omega_2^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Les corrections s'avèrent petites si $|\omega_z| \ll |\omega_1 - \omega_2|$, $|\omega_x| \ll |\omega_2 - \omega_3|$. Les oscillations naturelles sont des oscillations sur les ellipses fortement allongées suivant les axes de coordonnées.

Si, par exemple, $|\omega_z| \gg |\omega_1 - \omega_2|$, $|\omega_x| \ll |\omega_2 - \omega_3|$, $x^{(2)}$ et $y^{(2)}$ ne sont plus déjà, en vertu de (2), petits. La raison en est dans le fait que les pulsations des « forces » $\omega_z \dot{y}^{(1)}$ et $-\omega_z \dot{x}^{(1)}$ dans (1) sont proches des pulsations propres de l'oscillateur. Dans ce cas il faut conserver dans les équations de la première approximation les

termes de résonance:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}^{(1)} + \omega_1^2 x^{(1)} - \omega_z \dot{y}^{(1)} = 0, \\ &\ddot{y}^{(1)} + \omega_2^2 y^{(1)} + \omega_z \dot{x}^{(1)} = 0, \\ &\ddot{z}^{(1)} + \omega_3^2 z^{(1)} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

c'est-à-dire tenir compte de façon précise de l'influence de $\mathscr{H}_z$. Le système (3) a été étudié dans le problème 6.36. Il existe des équations donnant les corrections de second ordre

$$\begin{aligned} &\ddot{x}^{(2)} + \omega_1^2 x^{(2)} = 0, \\ &\ddot{y}^{(2)} + \omega_2^2 y^{(2)} = \omega_x \dot{z}^{(1)}, \\ &\ddot{z}^{(2)} + \omega_3^2 z^{(2)} = -\omega_x \dot{y}^{(1)}. \end{aligned}$$

Ecrivons les oscillations libres et, pour ne pas trop surcharger les formules, limitons-nous au cas de $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left\{ A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ \dfrac{\omega\omega_x}{\omega_3^2 - \omega^2} \end{pmatrix} e^{i\left(\omega + \frac{\omega_z}{2}\right)t} + \right.$$

$$\left. + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \dfrac{-\omega\omega_x}{\omega_3^2 - \omega^2} \end{pmatrix} e^{i\left(\omega - \frac{\omega_z}{2}\right)t} + A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{i\omega_x\omega_3}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_3 t}. \right. \tag{4}$$

Les oscillations naturelles (4) de pulsations $\omega \pm \frac{\omega_z}{2}$ s'effectuent (dans l'approximation adoptée) sur des cercles dont les plans forment vec le plan (x, y) des angles $\mp \frac{\omega_x \omega}{\omega_3^2 - \omega^2}$ (rotation autour de l'axe y), tandis que l'oscillation de pulsation ω_3 a lieu sur une ellipse fortement allongée suivant l'axe z et située dans le plan (y, z).

6.38. Les oscillations du pendule sont supposées petites, l'angle étant lu de la verticale dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre; en guise de seconde coordonnée prenons la charge q de l'armature droite du condensateur. Avec l'écartement du pendule de l'angle φ le flux magnétique à travers le contour est égal à $\Phi = \text{const} - \frac{1}{2}\mathscr{H} l^2 \varphi$, aussi la fonction de Lagrange (voir problème 4.21) devient-elle

$$L = \frac{1}{2}\left(m l^2 \dot{\varphi}^2 + \mathscr{L}\dot{q}^2 - mgl\varphi^2 - \frac{q^2}{C} - \mathscr{H} l^2 \varphi \dot{q} \right).$$

Si l'on introduit les coordonnées $x = l\varphi$ et $y = \sqrt{\mathscr{L}/mq}$, la fonction de Lagrange du système ne différera de celle du problè-

me 6.36 $\left(\text{aux paramètres } \omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{\mathscr{L}C}, \quad \omega_{\mathscr{H}} = -\frac{\mathscr{H}l}{2\sqrt{m\mathscr{L}}}\right.$ pour $\left.z = 0\right)$ que de la dérivée totale par rapport au temps: $\frac{m}{2}\omega_{\mathscr{H}}\frac{d}{dt}xy$. Aussi les équations de mouvement et leurs solutions du problème 6.36 conviennent-elles également dans le cas considéré.

6.39. Soit

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \varphi), \quad \mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_N) \tag{1}$$

une oscillation naturelle quelconque. Comme la substitution $x_i \to \sum_j S_{ij}x_j$ ne change pas l'aspect de la fonction de Lagrange, il doit, à côté de (1), exister une oscillation naturelle de la forme

$$S\mathbf{r} = S\mathbf{A}\cos(\omega t + \varphi), \quad (S\mathbf{A})_i = \sum_j S_{ij}A_j. \tag{2}$$

S est ici une matrice aux éléments S_{ij} qui, selon les données du problème, possède les propriétés (E étant la matrice unité, S^T la matrice transposée de S):

$$S^T = S, \quad SS = E. \tag{3}$$

a) Si la pulsation donnée ω n'est pas dégénérée, la solution (2) ne peut différer de (1) que d'un facteur commun:

$$S\mathbf{r} = c\mathbf{r}.$$

De façon analogue

$$SS\mathbf{r} = cS\mathbf{r} = c^2\mathbf{r}. \tag{4}$$

Puisque $SS = E$, il s'ensuit immédiatement de (4) que $\mathbf{r} = c^2\mathbf{r}$ ou $c^2 = 1$ et $c = \pm 1$. Aussi pour une pulsation non dégénérée a-t-on

$$\text{soit } S\mathbf{r} = +\mathbf{r}, \quad \text{soit } S\mathbf{r} = -\mathbf{r}.$$

b) Si la pulsation ω est dégénérée, les oscillations (1) et (2) peuvent ne pas coïncider. Mais leurs somme et différence

$$\mathbf{r} \pm S\mathbf{r} = (\mathbf{A} \pm S\mathbf{A})\cos(\omega t + \varphi)$$

sont également des oscillations naturelles de même pulsation qui possèdent des propriétés de symétrie nécessaires.

c) L'adjonction à la fonction de Lagrange est de la forme $\Delta L = \sum_i f_i x_i$, où

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$$

est la force extérieure agissant sur le système.

Admettons que $\mathbf{f}$ est symétrique, tandis que l'oscillation naturelle $\mathbf{r}_a$ de la forme (1) est antisymétrique par rapport à la transformation S, c'est-à-dire

$$S\mathbf{f} = +\mathbf{f}, \quad S\mathbf{r}_a = -\mathbf{r}_a. \tag{5}$$

La force considérée n'agit pas sur l'oscillation $\mathbf{r}_a$ au cas où les facteurs $\mathbf{f}$ et $\mathbf{r}_a$ sont mutuellement orthogonaux (voir problème 6.24):

$$(\mathbf{f}, \mathbf{r}_a) = 0. \tag{6}$$

De (5) il s'ensuit que

$$(S\mathbf{f}, S\mathbf{r}_a) = -(\mathbf{f}, \mathbf{r}_a). \tag{7}$$

D'autre part le premier membre de (7) peut être récrit sous la forme

$$(S\mathbf{f}, S\mathbf{r}_a) = (\mathbf{f}, S^T S\mathbf{r}_a). \tag{8}$$

De (3) il ressort de façon évidente que $S^T S = E$. Comparant alors (7) et (8), on obtient immédiatement (6).

Est-ce que les points a)-c) du problème se conservent intacts s'il n'est pas exigé que S^T soit égal à S?

6.40. Soit x_i l'écartement de l'i-ième particule sur l'anneau de la position d'équilibre, pour plus de netteté le déplacement dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre est considéré comme positif. Le système est manifestement symétrique par rapport à une rotation de 180° autour de l'axe AB passant par la position d'équilibre de la seconde particule et le centre de l'anneau. La fonction de Lagrange du système

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2}(\dot{x}_4^2 + \dot{x}_5^2) - \frac{k}{2}\left[\sum_{i=1}^{4}(x_i - x_{i+1})^2 + (x_5 - x_1)^2\right]$$

ne modifie donc pas sa forme avec la substitution correspondante à cette rotation

$$x_2 \to -x_2, \quad x_1 \to -x_3, \quad x_3 \to -x_1, \quad x_4 \to -x_5, \quad x_5 \to -x_4. \tag{1}$$

Le recours aux considérations de symétrie (voir problème précédent) et d'orthogonalité permet aisément de ramener ce problème de cinq degrés de liberté à deux problèmes indépendants de deux degrés de liberté chacun.

En effet les vecteurs d'oscillations naturelles, symétriques comme antisymétriques dans la transformation (1), prennent la forme

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \\ b \\ -b \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \varphi_s),$$

$$\mathbf{r}_a = \begin{pmatrix} c \\ d \\ c \\ f \\ f \end{pmatrix} \cos(\omega_a t + \varphi_a).$$

De plus, on devine facilement une « oscillation » antisymétrique qui est une rotation de toutes les particules sur l'anneau

$$\mathbf{r}_{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (Ct + C_1), \quad \omega_{a1} = 0.$$

Deux autres (outre $\mathbf{r}_{a1}$) oscillations antisymétriques doivent être orthogonales à $\mathbf{r}_{a1}$ à tenseur métrique défini par les coefficients de l'énergie cinétique, c'est-à-dire

$$m(2c + d) + 2Mf = 0. \tag{2}$$

Tout compte fait, il reste en somme deux coefficients indéterminés dans $\mathbf{r}_a$ et $\mathbf{r}_s$. Il suffit pour leur détermination d'utiliser deux équations de mouvement des cinq, par exemple pour la première et la cinquième particule :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2 - x_5) &= 0, \\ M\ddot{x}_5 + k(2x_5 - x_4 - x_1) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

En y portant la forme explicite de $\mathbf{r}_s$, on obtient pour deux oscillations symétriques

$$b_{1,2} = \left(\frac{m}{k}\omega_{s1,2}^2 - 2\right) a_{1,2},$$

$$\omega_{s1,2}^2 = \frac{k}{2mM}\left(2M + 3m \mp \sqrt{2(M-m)^2 + 5m^2}\right).$$

De façon analogue, portons dans (3) le vecteur $\mathbf{r}_a$ et, compte tenu de (2), il vient

$$c_{2,3} = \left(\frac{M}{k}\omega_{a2,3}^2 - 1\right) f_{2,3}, \quad d_{2,3} = -2c_{2,3} - \frac{2M}{m} f_{2,3},$$

$$\omega_{a2,3}^2 = \frac{k}{2mM}\left(4M + m \mp \sqrt{\frac{1}{2}(4M-m)^2 + \frac{1}{2}m^2}\right).$$

6.41. Le système étudié est proche de celui analysé dans le problème 6.28a, la fonction de Lagrange dans le problème considéré ne

différant que d'une petite quantité

$$\delta L = \delta L_1(x, \dot{x}) + \delta L_2(y, \dot{y}) + \delta L_3(z, \dot{z}),$$

$$\delta L_1(x, \dot{x}) = \frac{\varepsilon k}{2}[x_2^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_4 - x_5)^2 + x_4^2],$$

$$\varepsilon = \frac{l - l_1}{l} \ll 1.$$

Dans ce cas les oscillations suivant x, y, z s'effectuent indépendamment. On ne s'intéresse qu'aux oscillations suivant x.

Il est commode pour la détermination des pulsations d'oscillations de recourir à la méthode d'approximations successives (voir problème 6.34). Les pulsations $\omega_{3,4}$ ne sont pas dégénérées, de sorte qu'à ces oscillations on peut appliquer directement la formule (4) du problème 6.34.

La pulsation ω_1 du problème de base (6.28a) est triplement dégénérée, donc pour la détermination des corrections à la pulsation et aux vecteurs d'oscillations naturelles il semble qu'on devrait étudier le système d'équations (5) du problème 6.34. Or les propriétés de symétrie du système permettent aussitôt d'indiquer ceux des vecteurs d'oscillations naturelles du système étalon qui varient insensiblement avec l'adjonction de δL. C'est précisément les vecteurs (1) du problème 6.28, car ces derniers sont justement doués de propriétés déterminées de symétrie : l'oscillation $\mathbf{r}_3$ est symétrique par rapport à l'axe AB et antisymétrique par rapport à CD, $\mathbf{r}_1$ étant symétrique et $\mathbf{r}_2$ antisymétrique par rapport aux deux axes. Les corrections aux pulsations de ces oscillations peuvent également être calculées d'après la formule (4) du problème 6.34.

En remplaçant $x_1 = -x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, il vient

$$\delta K_{11} = -2\delta L_1 = 0,$$

de sorte que $\delta\omega_1 = 0$. De façon analogue

$$\delta K_{22} = -2\delta L_1 (x_1 = x_3 = x_5 = 0, \quad x_2 = -x_4 = 1) = -4\varepsilon k,$$

$$M_2 = 2L_1 (\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_4 = 1, \quad x_i = 0) = 2m,$$

soit $\delta\omega_2 = -\varepsilon\sqrt{\frac{k}{2m}}$;

$$\delta K_{33} = -4\varepsilon k, \quad M_3 = 4m \quad \delta\omega_3 = -\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

En représentant le vecteur écartement initial $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$

et le vecteur vitesse initiale $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$ sous la forme $\mathbf{r}(0) = \sum_i \mathbf{r}_i(0)$

et $\dot{\mathbf{r}}(0)=\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i(0)$ respectivement, on obtient que

$$A_1=A_2=A_3=\frac{a}{2}, \quad A_4=A_5=\varphi_i=0.$$

Donc dans l'approximation considérée les quatrième et cinquième oscillations naturelles ne sont pas amorcées et les oscillations des particules

$$x_{1,3}=\frac{a}{2}(\pm\cos\omega_1 t+\cos\omega_3 t),$$

$$x_{2,4}=\frac{a}{2}(\pm\cos\omega_2 t-\cos\omega_3 t), \quad x_5=0$$

sont du type de battements (voir à ce propos problème 6.31).

6.42. Dans ce problème il convient d'utiliser la méthode d'approximations successives (voir problème 6.34). La variation de masses implique l'apparition de l'adjonction à la fonction de Lagrange

$$\delta L=\frac{1}{2}(\delta m_1\dot{x}_1^2+\delta m_2\dot{x}_2^2).$$

Il faut l'exprimer en fonction des coordonnées normales du système étalon (voir problème 6.21). Dans ce cas le coefficient du produit des vitesses généralisées $\dot{q}_1\dot{q}_2$, correspondant à la pulsation dégénérée, devient nul. Les produits restants $\dot{q}_l\dot{q}_s$ (pour $\omega_l\neq\omega_s$) peuvent être négligés, comme c'est indiqué au problème 6.34. Il vient

$$\delta L_1=\frac{1}{4}\delta m_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{4}\delta m_2\dot{q}_2^2+\frac{1}{8}(\delta m_1+\delta m_2)(\dot{q}_3^2+\dot{q}_4^2).$$

La fonction de Lagrange $L+\delta L_1$, comme la fonction de Lagrange du système étalon, se sépare en termes dont chacun ne renferme qu'une seule des coordonnées q_l. Les coordonnées q_l demeurent ainsi normales et pour le calcul des corrections aux pulsations on peut recourir à la formule (4) du problème 6.34:

$$\delta\omega_1=-\frac{\varepsilon_1}{4}\omega_1, \quad \delta\omega_2=-\frac{\varepsilon_2}{4}\omega_3,$$

$$\delta\omega_3=-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{8}\omega_3, \quad \delta\omega_4=0, \quad \varepsilon_i=\frac{\delta m_i}{m}.$$

Toutes les pulsations propres du système sont devenues différentes, la non-unicité de choix des vecteurs d'oscillations naturelles disparaissant: à la précision jusqu'à ε_i près, ce sont les vecteurs (1) du problème 6.21.

Il est intéressant que pour $\delta m_1=\delta m_2$ les pulsations $\omega_1+\delta\omega_1$ et $\omega_2+\delta\omega_2$ coïncident de nouveau l'une avec l'autre (à la précision des corrections de second ordre près $|\delta\omega_1-\delta\omega_2|\sim\varepsilon_1^2\omega_1$). Dans

ce cas la fonction de Lagrange $L + \delta L_1$ implique de nouveau un choix de vecteurs non univoque d'oscillations naturelles. Toutefois, pour une solution précise du problème, au cas où $\delta m_1 = \delta m_2$, les vecteurs d'oscillations naturelles prennent la forme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1-\varepsilon \\ -1-\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mp\sqrt{1+\varepsilon+9\varepsilon^2} \pm 3\varepsilon \\ \pm\sqrt{1+\varepsilon+9\varepsilon^2} \mp 3\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et pour des petits ε ils sont proches des vecteurs (2) du problème 6.21 (à la précision des facteurs de normalisation près négligés ici). Une forte variation de l'aspect des oscillations naturelles se produit dans le très étroit intervalle de variation des masses $|\delta m_1 - \delta m_2| \lesssim \varepsilon^2 m$ (comp. avec problème 6.5a). Pour la détermination des vecteurs d'oscillations naturelles dans cet intervalle de valeurs de δm_1, δm_2 on pourrait recourir à l'approximation suivante de la méthode des approximations successives.

6.43. Vraisemblablement, les mouvements des particules en direction des axes AA et BB sont indépendants. Étudions le mouvement en direction de l'axe AA.

Pour les première et quatrième particules, l'écartement à gauche sera considéré comme positif, pour la deuxième et la troisième, ce sera l'écartement à droite. Selon les résultats obtenus au problème 6.39, les oscillations naturelles $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ peuvent être choisies aussi bien symétriques qu'antisymétriques par rapport aux axes AA et BB. Pour une oscillation symétrique par rapport à l'axe AA $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$. Si, en outre, cette oscillation est symétrique par rapport à l'axe BB, on a aussi $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, de sorte que pour cette oscillation doublement symétrique on a $\mathbf{r}_{ss} = (1, 1, 1, 1)\, q_{ss}$.

Pour une oscillation symétrique par rapport à l'axe AA et antisymétrique par rapport à l'axe BB, on a $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$ et $x_1 = -x_2$, $x_4 = -x_3$, de sorte que

$$\mathbf{r}_{sa} = (1, -1, -1, 1)\, q_{sa}.$$

De façon analogue, on obtient

$$\mathbf{r}_{as} = (1, 1, -1, -1)\, q_{as}, \quad \mathbf{r}_{aa} = (1, -1, 1, -1)\, q_{aa}.$$

La même méthode permet de trouver les vecteurs des oscillations naturelles suivant la direction verticale.

Les pulsations des oscillations peuvent s'obtenir en portant les vecteurs trouvés dans les équations de mouvement.

En cas de dégénérescence, en plus des oscillations naturelles trouvées, il existe une multitude d'oscillations naturelles démunies

de propriétés mentionnées de symétrie. Il est aisé de comprendre, par exemple, que les pulsations d'oscillations *ss* et *aa* coïncident $\omega_{ss} = \omega_{aa} = 2\sqrt{k/m}$ au cas où la tension des ressorts n'est pas quelconque mais est égale à kl (où l est la longueur de chaque ressort en position d'équilibre). Mais alors toute superposition de vecteurs $\mathbf{r}_{aa}$ et $\mathbf{r}_{ss}$ sera une oscillation naturelle, par exemple le vecteur $(1, 0, 1, 0)\, q_{ss}$.

De façon analogue s'obtiennent les vecteurs d'oscillations naturelles en direction de l'axe BB.

6.44. Vraisemblablement, les oscillations en directions de AA, BB ainsi qu'en direction perpendiculaire au plan du cadre sont indépendantes. Passons à l'étude, disons, des premières.

Les composantes du vecteur oscillation peuvent être disposées en tableau correspondant à la forme du cadre. Pour les particules se trouvant à gauche de l'axe BB on considère comme positifs les écartements vers la gauche, pour les particules se disposant à droite, les écartements vers la droite. L'oscillation *ss*, symétrique par rapport aux deux axes AA et BB, a la forme

$$\begin{pmatrix} x & X & X & x \\ x & X & X & x \end{pmatrix}.$$

Les oscillations x, X se ramènent aux oscillations du système étudié au problème 6.7 avec $m_1 = m$, $m_2 = M$, où il faut poser $k_1 = k + k'$, $k_2 = k$, $k_3 = 2k + k'$, $k' = f/l$. On a donc deux oscillations *ss*.

Les oscillations *sa* symétriques par rapport à l'axe AA et antisymétriques par rapport à l'axe BB ont la forme

$$\begin{pmatrix} x & X & -X & -x \\ x & X & -X & -x \end{pmatrix},$$

mais maintenant on a $k_3 = k'$, $k_1 = k + k'$.

De façon analogue, pour les oscillations *as* et *aa* on a:

$$\begin{pmatrix} x & X & X & x \\ -x & -X & -X & -x \end{pmatrix}, \quad k_1 = k + 3k', \quad k_3 = 2k + 3k',$$

$$\begin{pmatrix} x & X & -X & -x \\ -x & -X & X & x \end{pmatrix}, \quad k_1 = k + 3k', \quad k_3 = 3k'.$$

La même méthode donne les seize oscillations naturelles restantes.

6.45. En notations du problème précédent le vecteur force prend la forme

$$\begin{pmatrix} -k-k', & -k', & k', & k+k' \\ -k-k', & -k', & k', & k+k' \end{pmatrix} a \cos \gamma t.$$

Il est orthogonal à toutes les oscillations naturelles à l'exception des oscillations symétriques et antisymétriques (*sa*). Aussi la résonance ne s'observe-t-elle que pour deux pulsations $\gamma = \omega_{1,2}^{sa}$, où

$$(\omega_{1,2}^{sa})^2 = \frac{1}{2mM}\left\{k(2M+m)+\frac{f}{l}(M+m) \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left[k(2M-m)+\frac{f}{l}(M-m)\right]^2+4k^2Mm}\right\}.$$

6.46. La molécule linéaire C_2H_2 ne possède que sept oscillations naturelles: trois oscillations longitudinales et deux paires d'oscillations de flexion dans deux plans mutuellement perpendiculaires (voir, par exemple [1], § 24).

Le problème de détermination des deux oscillations longitudinales symétriques $x_1 = -x_4$, $x_2 = -x_3$ se ramène au problème 6.7 aux paramètres $k_2 = k_{HC}$, $k_3 = 2k_{CC}$, $k_1 = 0$, où k_{HC} et k_{CC} sont les rigidités des liaisons HC et CC. L'oscillation longitudinale antisymétrique $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$, $m_H x_1 + m_C x_2 = 0$ a pour pulsation $\omega_{a1} = \sqrt{\frac{k_{HC}(m_H+m_C)}{m_H m_C}}$ (la même que celle de la « molécule » CH). Remarquons que le déplacement longitudinal de la molécule en bloc $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ peut être interprété comme une seconde oscillation antisymétrique, la condition d'orthogonalité à la première oscillation antisymétrique se ramenant à la condition de l'égalité à zéro de l'impulsion totale de la molécule.

L'oscillation transversale symétrique $y_1 = y_4$, $y_2 = y_3$, sera

$$m_H y_1 + m_C y_2 = 0, \quad \omega_{s3}^2 = \frac{k_{HCC}(m_H+m_C)}{l_{HC}^2 m_H m_C}.$$

k_{HCC} est ici la rigidité de la molécule à la flexion; avec la flexion de la liaison HCC d'angle δ l'énergie potentielle augmente de $k_{HCC}\delta^2/2$.

L'oscillation transversale antisymétrique $y_1 = -y_4$, $y_2 = -y_3$ est de la forme

$$m_C l_{CC} y_2 + m_H (l_{CC} + 2l_{HC}) y_1 = 0,$$

$$\omega_{a2}^2 = \frac{k_{HCC}[m_C l_{CC}^2 + m_H(2l_{HC}+l_{CC})^2]}{m_H m_C l_{HC}^2 l_{CC}^2},$$

où l_{HC} et l_{CC} sont les distances d'équilibre entre les atomes H — C et C — C respectivement. Notons que le rapport entre les déplacements des atomes au cours de cette oscillation peut être obtenu en

partant de l'égalité à zéro du moment cinétique total de la molécule (ou de l'orthogonalité au vecteur de la rotation pure de la molécule en bloc $y_1 = -y_4$, $y_2 = -y_3$, $y_2 (2l_{HC} + l_{CC}) = y_1 l_{CC}$ qu'on peut assimiler à une seconde oscillation antisymétrique).

6.47. Désignons les écartements des particules de la position d'équilibre en direction de BD par x_1 et x_2 et en direction de CF par y_1 et y_2. La rotation autour de l'axe de symétrie CF de 180° se ramène aux substitutions:

$$x_1 \rightleftarrows -x_2, \quad y_1 \rightleftarrows y_2,$$

c'est-à-dire que la transformation S de rotation du vecteur oscillation $\mathbf{r} = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ prend la forme

$$S\mathbf{r} = (-x_2, y_2, -x_1, y_1).$$

Par suite de la symétrie du système il peut s'y produire deux formes d'oscillations: $\mathbf{r}_s$ — oscillations symétriques par rapport à l'axe CF pour lesquelles $S\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s$ et oscillations antisymétriques $\mathbf{r}_a$ pour lesquelles $S\mathbf{r}_a = -\mathbf{r}_a$. Au cas d'oscillation symétrique $(-x_2, y_2, -x_1, y_1) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$, d'où

$$\mathbf{r}_s = (x, y, -x, y).$$

De façon analogue on trouve que

$$\mathbf{r}_a = (x, y, x, -y).$$

(Pour une oscillation antisymétrique, la rotation autour de l'axe de symétrie équivaut à une modification de la phase d'oscillation de π.)

Deux oscillations symétriques et deux oscillations antisymétriques sont possibles: pour déterminer les pulsations et les vecteurs de chaque paire d'oscillations il suffit de recourir à deux équations de mouvement.

Certains renseignements peuvent encore être obtenus sur la forme des oscillations naturelles en l'absence de données sur la rigidité des ressorts. La condition d'orthogonalité des vecteurs oscillations $\mathbf{r}_{s1}$ et $\mathbf{r}_{s2}$ se ramène à l'égalité

$$2m\,(x_{s1}x_{s2} + y_{s1}y_{s2}) = 0,$$

qui montre que les vecteurs écartements, par exemple, de la particule *1*, pour chacune des deux oscillations symétriques, sont mutuellement perpendiculaires (fig. 130, *a*), phénomène s'observant également pour les oscillations antisymétriques (fig. 130, *b*).

On ne peut déterminer la direction de l'écartement de la particule à chaque oscillation naturelle sans connaître la rigidité des ressorts. En effet, si la rigidité et les tensions des ressorts AC et CE sont faibles, les écartements des particules dans des oscillations

naturelles sont dirigés à peu près suivant ou transversalement aux ressorts BD et, réciproquement, au cas d'une faible rigidité des ressorts BD les oscillations naturelles se réalisent à peu près suivant ou transversalement aux ressorts AC et CE.

Il va de soi qu'au cas de dégénérescence il est possible de choisir d'autres vecteurs d'oscillations naturelles démunis de propriétés

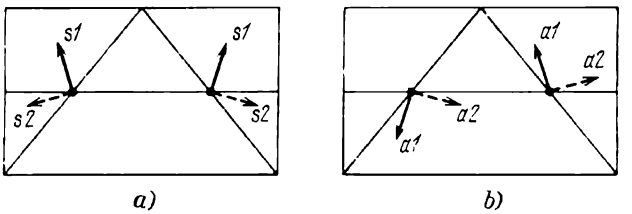


Fig. 130

de symétrie. Par exemple, en cas de mise hors jeu du ressort BD ce rôle peut être dévolu aux oscillations de chacune des particules suivant ou transversalement aux ressorts AC et CE.

6.48. Désignons les écarts de chacun des atomes de la position d'équilibre en direction de OD par x_i, en direction de OA par y_i et perpendiculairement au plan de la molécule par z_i.

Les oscillations de la molécule C_2H_4 se répartissent en celles qui conservent à la molécule sa forme plane et en celles qui sortent les atomes du plan. Étudions ces dernières oscillations.

Il est commode d'écrire le vecteur écartement sous la forme

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} z_1 & & & z_4 \\ & z_2 & z_5 & \\ z_3 & & & z_6 \end{pmatrix}.$$

Pour l'oscillation symétrique par rapport à l'axe AB,

$$z_4 = z_1, \quad z_5 = z_2, \quad z_6 = z_3.$$

Si l'oscillation est encore antisymétrique par rapport à l'axe CD, on a alors

$$z_3 = -z_1, \quad z_2 = -z_2, \quad z_5 = -z_5, \quad z_6 = -z_4.$$

Donc

$$\mathbf{r}_{sa} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 0 & 0 & \\ -1 & & & -1 \end{pmatrix} q_{sa}.$$

Cette « oscillation » s'est avérée être une rotation autour de l'axe CD.

De façon analogue, les oscillations symétriques par rapport aux deux axes sont

$$\mathbf{r}_{ss} = \begin{pmatrix} z_1 & & & z_1 \\ & z_2 & z_2 & \\ z_1 & & & z_1 \end{pmatrix}.$$

L'une d'elles est

$$\mathbf{r}_{ss,1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} q_{ss,1}.$$

C'est un mouvement de translation. L'amplitude de l'autre peut être déterminée en tenant compte de son orthogonalité au vecteur $\mathbf{r}_{ss,1}$):

$$4mz_1 + 2Mz_2 = 0,$$

m étant la masse de l'atome d'hydrogène et M celle du carbone.

$$\mathbf{r}_{ss,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ -\frac{2m}{M} & & & -\frac{2m}{M} \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} q_{ss,2}.$$

L'oscillation antisymétrique par rapport aux deux axes

$$\mathbf{r}_{aa} = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & 0 & 0 & \\ -1 & & & 1 \end{pmatrix} q_{aa}$$

est une rotation autour de l'axe CD.

Enfin

$$\mathbf{r}_{as,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ & a_i & -a_i & \\ 1 & & & -1 \end{pmatrix} q_{as,i}.$$

Ici, pour la rotation autour de l'axe AB ($\mathbf{r}_{as,1}$) $a_1 = l_{OC}/l_{OH}$ qui est le rapport entre les distances des atomes de carbone et d'hydrogène de l'axe AB en position d'équilibre ; pour une oscillation de flexion ($\mathbf{r}_{as,2}$)

$$a_2 = -\frac{2m}{M}\frac{l_{OH}}{l_{OC}}.$$

De façon analogue peuvent être étudiées les oscillations ne sortant pas les atomes du plan de la molécule. Le vecteur écartement se

transcrira sous la forme

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \; y_1 & & & x_4 \; y_4 \\ & x_2 \; y_2 \; x_5 \; y_5 & & \\ x_3 y_3 & & & x_6 y_6 \end{pmatrix}.$$

L'aspect général de l'oscillation *as* est de la forme

$$\mathbf{r}_{as} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & & x_1 & -y_1 \\ & & x_2 \; 0 \; x_2 \; 0 & & \\ x_1 & -y_1 & & x_1 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Dans le nombre d'oscillations *as* entre la translation de la molécule en direction de l'axe x ($x_1 = x_2$, $y_1 = 0$). Les deux autres oscillations *as* sont représentées sur la figure 131, *a*, *b*.

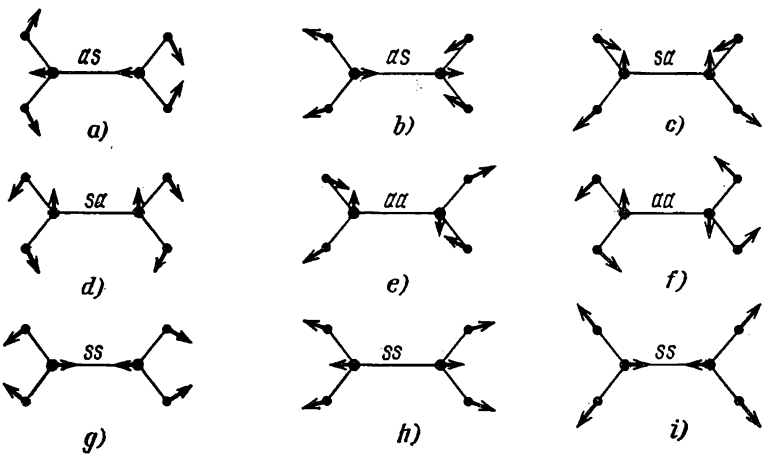


Fig. 131

Pour se représenter l'aspect des écartements d'atomes dans ces oscillations, notons que la distance entre les atomes de carbone ne varie pas, la liaison C—C est « inopérante ». Si l'on néglige les interactions entre des atomes relativement éloignés (par exemple, *1—4*, *1—5*, sur fig. 40), ainsi que la rigidité des angles du type *1—2—5*, les oscillations étudiées coïncideraient alors avec les oscillations symétriques, par rapport à l'axe *CD*, de deux « molécules » H_2C s'effectuant en opposition de phase (comp. avec problème 6.46 ; les oscillations de la molécule du type A_2B ont été étudiées dans [1], § 24, problème 2).

La forme générale de l'oscillation *sa* est :

$$\mathbf{r}_{sa} = \begin{pmatrix} x_1\ y_1 & & -x_1\ y_1 \\ & 0\ y_2\ 0\ y_2 & \\ -x_1\ y_1 & & x_1\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Outre le mouvement de translation en direction de l'axe y, il correspond au vecteur $\mathbf{r}_{sa}$ deux oscillations (fig. 131, *c*, *d*). L'une d'elles (*c*) peut être assimilée aux oscillations de deux « molécules » H_2C, antisymétriques par rapport à l'axe *CD* et s'effectuant en phase. L'autre (*d*) est la rotation des « molécules » H_2C en des sens différents. Si l'on pouvait négliger complètement les liaisons entre les atomes éloignés et la rigidité d'angles de type *1—2—5*, la pulsation de cette oscillation s'avérerait égale à zéro.

Parmi les oscillations *aa* il y a une rotation de la molécule en bloc dans le plan *xy*, des oscillations antisymétriques de « molécules » H_2C en opposition de phase (fig. 131, *e*) et leurs rotations dans l'un des sens (fig. 131, *f*).

Sont également possibles trois oscillations *ss* (à symétrie parfaite) représentées sur la figure 131, *g*, *h*, *i* (pour l'étude détaillée sur les oscillations de la molécule d'éthylène voir par exemple [17].)

6.49. La fonction de Lagrange

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_2^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) - \frac{k}{2}\{(|\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20} + \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| - l)^2 + \\ + (|\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{30} + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3| - l)^2 + (|\mathbf{r}_{30} - \mathbf{r}_{10} + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1| - l)^2\},$$

où $l = |\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}| = |\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{30}| = |\mathbf{r}_{30} - \mathbf{r}_{10}|$; $\mathbf{u}_a$ est le déplacement de l'*a*-ième atome de la position d'équilibre définie par le rayon vecteur $\mathbf{r}_{a0}$. Puisque $|\mathbf{u}_a| \ll l$, il vient

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_2^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) - \frac{k}{2}\{(\mathbf{e}_{12}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))^2 + \\ + (\mathbf{e}_{23}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3))^2 + (\mathbf{e}_{31}(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1))^2\}, \qquad (1)$$

où

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}}{l}, \quad \mathbf{e}_{23} = \frac{\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{30}}{l}, \quad \mathbf{e}_{31} = \frac{\mathbf{r}_{30} - \mathbf{r}_{10}}{l}.$$

Dans le système de référence, où l'impulsion totale $m(\dot{\mathbf{u}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_2 + \dot{\mathbf{u}}_3) = 0$, la condition

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = 0 \qquad (2)$$

est satisfaite. De plus, à $\mathbf{u}_a$ est imposée la condition

$$[\mathbf{r}_{10}\mathbf{u}_1] + [\mathbf{r}_{20}\mathbf{u}_2] + [\mathbf{r}_{30}\mathbf{u}_3] = 0, \qquad (3)$$

équivalente à l'exigence pour l'énergie cinétique de la molécule

$$\mathbf{M} = m \sum_a [\mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a, \dot{\mathbf{u}}_a] \tag{4}$$

de s'annuler avec une précision jusqu'au premier degré en $\mathbf{u}_a$ inclus près.

Il s'avère profitable de choisir pour la description du mouvement de chacun des atomes son propre système de coordonnées cartésiennes

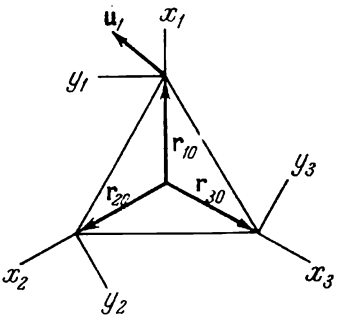


Fig. 132

(fig. 132), en conservant ainsi la symétrie dans la description du système. Dans ces coordonnées, les égalités (2), (3) deviennent *)

$$y_1 + \left(-\frac{1}{2} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_2\right) + \left(-\frac{1}{2} y_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} x_3\right) = 0, \tag{5}$$

$$y_2 + \left(-\frac{1}{2} y_3 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_3\right) + \left(-\frac{1}{2} y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} x_1\right) = 0, \tag{6}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

soit

$$y_1 = \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_3}{\sqrt{3}}, \quad y_3 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{3}}$$

et

$$L = \frac{5m}{6} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{m}{3} (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2 \dot{x}_3 + \dot{x}_3 \dot{x}_1) - \frac{3}{2} k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

*) En multipliant, par exemple, les deux membres de l'égalité (2) par $\mathbf{e}_{23}$, on obtient (5). Il faut dans ce cas tenir compte de ce que le vecteur $\mathbf{e}_{23}$ possède dans les différents systèmes les coordonnées

$$\mathbf{e}_{23} = (0, 1)_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)_3,$$

tandis que $\mathbf{u}_a = (x_a, y_a)_a$.

L'égalité (6) s'obtient à partir de (5) par permutation circulaire des indices.

Une des oscillations naturelles (à symétrie parfaite) est évidente

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} q_1. \tag{7}$$

Les deux autres sont orthogonales à la première, ce qui implique la condition *)

$$x_1^{(s)} + x_2^{(s)} + x_3^{(s)} = 0, \quad s = 2, 3. \tag{8}$$

L'une de ces oscillations est symétrique par rapport à l'axe x_1 : $x_2^{(2)} = x_3^{(2)}$; et l'autre antisymétrique : $x_1^{(3)} = 0$, $x_2^{(3)} = -x_3^{(3)}$.

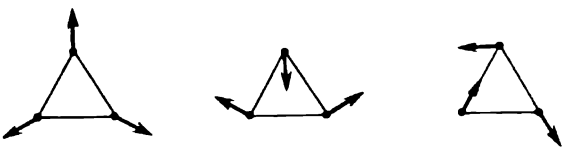


Fig. 133

Compte tenu de (8), il vient

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= -2x_2^{(2)} = -2x_3^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, q_2, \\ x_2^{(3)} &= -x_3^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_3. \end{aligned} \tag{9}$$

La substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} q_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\, q_2, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} q_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} q_3 \end{aligned}$$

amène la fonction de Lagrange à la forme

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_3^2) - \frac{3k}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2). \tag{10}$$

Les oscillations naturelles correspondant à ces coordonnées sont représentées sur la figure 133. Leurs pulsations sont

$$\omega_1 = \sqrt{3\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}.$$

*) On a utilisé la métrique k_{ij}. Dans (7), (9) les facteurs devant q sont choisis de manière que $x_1^{(l)2} + x_2^{(l)2} + x_3^{(l)2} = q_l^2$.

La forme (10) de la fonction de Lagrange se conserve après rotation dans le plan q_2, q_3.

Le moment cinétique compte tenu des termes quadratiques en $\mathbf{u}_a$

$$|\mathbf{M}| = m \left| \sum_a [\mathbf{u}_a \dot{\mathbf{u}}_a] \right| = m \, | q_2 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_2 |$$

peut être différent de zéro si les oscillations q_2 et q_3 s'effectuent avec un déphasage.

Il s'avère intéressant d'éclaircir les variations que peut introduire dans cette image la dépendance de l'énergie potentielle des angles entre les liaisons. Sur la pulsation des oscillations q_1 elle ne se ressentira évidemment pas. Par contre, la pulsation des oscillations q_2 et q_3 variera, mais la double dégénérescence se conservera. En effet, à côté d'une certaine oscillation q il peut également se produire une oscillation déduite par rotation de $2\pi/3$. Sa pulsation doit être la même que celle de l'oscillation q. Mais d'un autre côté elle diffère de q (une rotation de $2\pi/3$ ne faisant coïncider avec elle-même que l'oscillation q_1). On obtient donc ainsi deux oscillations indépendantes de même pulsation. Dans ce cas les coordonnées normales ne doivent satisfaire qu'à une seule condition : être orthogonales à q_1 ; en particulier, q_2 et q_3 demeurent des coordonnées normales.

6.50. a) Introduisons les coordonnées des atomes B de la même façon que dans le problème précédent, pour l'atome A les coordonnées sont x_4, y_4, z_4 avec des axes parallèles respectivement à x_1, y_1, z_1 et l'origine au centre du triangle.

Il y a quatre degrés de liberté de mouvement permettant de sortir les atomes du plan xy. Trois d'entre eux correspondent à une translation le long de l'axe z et aux rotations autour des axes x_4 et y_4 et un degré à une oscillation (pour laquelle, vraisemblablement, $z_1 = z_2 = z_3$, $m_A z_4 + m(z_1 + z_2 + z_3) = 0$). La pulsation de cette oscillation ω_1 n'est pas dégénérée et ne peut que fortuitement coïncider avec celle d'une quelconque autre oscillation.

Étudions l'oscillation des atomes dans le plan xy, qui est symétrique par rapport à x_4. La forme générale de cette oscillation est :

$$y_1 = 0, \quad x_2 = x_3, \quad y_2 = -y_3, \quad y_4 = 0.$$

Le vecteur écartement comprend quatre paramètres indépendants : x_1, x_2, y_2, x_4, autrement dit, à ces mouvements répondent quatre degrés de liberté. L'un d'eux correspond à une translation de la molécule suivant l'axe x_4, l'un à une oscillation à symétrie parfaite

$$x_1 = x_2 = x_3, \quad y_1 = y_2 = y_3 = x_4 = y_4 = 0$$

de pulsation ω_2 (fig. 134, *a*), tandis que deux autres répondent à des oscillations détruisant la symétrie de la molécule. Les pulsations de ces oscillations sont ω_3 et ω_4 (fig. 134, *b*, *c*).

Des quatre degrés de liberté restants un correspond à une translation en direction de l'axe y_4, un à la rotation autour de l'axe z_4 et deux à des oscillations. Ce sont des oscillations qui peuvent être obtenues en partant des oscillations de pulsations ω_3, ω_4 déjà mentionnées par rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe z_4 (comp. avec problème précédent).

Bref, les pulsations ω_1, ω_2 ne sont pas dégénérées, quant aux pulsations ω_3 et ω_4 elles le sont doublement.

Notons que les vecteurs de l'oscillation antisymétrique par rapport à l'axe x_4 peuvent être obtenus en connaissant le vecteur

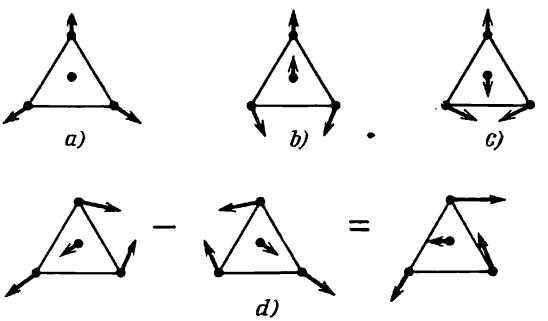


Fig. 134

de l'oscillation symétrique. Il suffit pour cela de procéder à une certaine superposition des oscillations obtenues sur la base du vecteur de l'oscillation symétrique par rotation autour de l'axe z_4 d'angles $\pm 2\pi/3$, c'est-à-dire de prendre leur différence (voir fig. 134, *d*).

b) Les variations des pulsations propres peuvent être déterminées en recourant à la théorie des perturbations (voir problème 6.34) :

$$\delta\omega = -\frac{\omega}{2}\frac{\delta M}{M}.$$

Pour une oscillation à symétrie parfaite on peut choisir en guise de coordonnée normale la coordonnée x_1. Les quantités M et δM constituent alors des coefficients dans les expressions de l'énergie cinétique et de son adjonction :

$$\frac{3m}{2}\dot{x}_1^2 = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2, \quad \frac{\delta m}{2}\dot{x}_1^2 = \frac{\delta M}{2}\dot{x}_1^2,$$

de sorte que

$$\delta\omega_2 = -\omega_2\frac{\delta m}{6m}.$$

Pour l'oscillation le long de l'axe z l'énergie cinétique et l'adjonction qui lui est apportée valent :

$$\frac{3m}{2}\left(1+\frac{3m}{m_A}\right)\dot{z}_1^2 \quad \text{et} \quad \frac{\delta m}{2}\dot{z}_1^2,$$

de sorte que

$$\delta\omega_1 = -\frac{\omega_1}{2}\frac{\delta m m_A}{3m(3m+m_A)}.$$

Par exemple, pour le chlorure de bore le remplacement d'un atome de chlore de poids atomique 35 par son isotope de poids atomique 37 entraîne une diminution des pulsations ω_1 et ω_2 de 0,1 % et 1 % respectivement.

6.51. Supposons que les oscillations qui ne modifient pas la forme de la molécule s'effectuent avec la pulsation ω_1 (fig. 135, *a*).

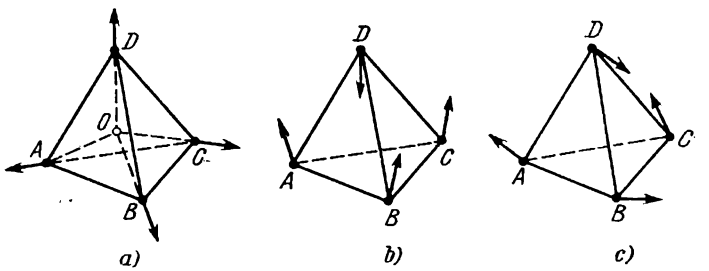


Fig. 135

La pulsation ω_2 de l'oscillation conservant sa forme après rotation autour de l'axe OD d'angle $2\pi/3$ (fig. 135, *b*) est en général différente de ω_1. Une autre distribution des déplacements d'atomes s'obtient en réfléchissant les déplacements sur le plan BCO, on aboutit alors à une oscillation ne différant de la seconde que par la permutation des rôles d'atomes A et D. La pulsation de cette oscillation est $\omega_3 = \omega_2$. De même, une réflexion sur le plan AOC conduit à l'échange de places entre B et D avec conservation de la pulsation $\omega_4 = \omega_2$. Cette quatrième oscillation ne se ramène pas à une superposition des précédentes, car, à la différence de ces dernières, elle n'est pas symétrique par rapport au plan AOD.

L'oscillation symétrique par rapport aux plans AOB et DOC (fig. 135, *c*) possède la pulsation ω_5 qui se distingue de ω_1 et ω_2. La rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'axe OD, qui équivaut à une permutation circulaire de A, B et C, se résout en une oscillation symétrique par rapport aux plans COA et DOB, sa pulsation étant $\omega_6 = \omega_5$.

Bref, la molécule possède trois pulsations propres simplement, doublement et triplement dégénérées.

En conclusion notons que les molécules étudiées dans les problèmes 6.49 et 6.51, à ce qui semble, n'existent pas dans la nature. Cependant une méthode d'étude identique peut être également utilisée pour les molécules réelles.

6.52 a) Dans des oscillations à symétrie parfaite et doublement dégénérées mentionnées au problème précédent (voir fig. 135, *a*, *c*) l'atome de carbone demeure immobile. Il existe encore deux pulsations triplement dégénérées. Les oscillations qui y correspondent sont représentées sur la figure 135, *b* avec cette différence que l'atome de carbone y oscille soit dans la direction de l'atome D, soit dans la direction opposée.

b) L'adjonction à la fonction de Lagrange décrivant l'action du champ électrique $\mathcal{E}(t)$ est

$$\delta L = \mathcal{E}(t) \sum_a e_a \mathbf{u}_a,$$

où e_a est la charge, $\mathbf{u}_a$ l'écartement de l'a-ième atome.

Dans toute oscillation $m \sum_{a=1}^{4} \mathbf{u}_a + m_C \mathbf{u}_5 = 0$, de sorte que

$$\sum_{a=1}^{5} e_a \mathbf{u}_a = -e_1 \left(\frac{m_C}{m} + 4 \right) \mathbf{u}_5.$$

Pour des oscillations à symétrie parfaite et doublement dégénérées $\sum e_a \mathbf{u}_a = 0$ et ces oscillations ne sont pas amorcées. Par contre, pour des oscillations de la figure 135, *b* $\sum e_a \mathbf{u}_a \neq 0$ et ces oscillations sont amorcées.

La résonance est donc possible sur deux pulsations.

Le vecteur $\mathcal{E}$ peut être décomposé en trois composantes $\mathcal{E}_j$ parallèles aux axes de symétrie de chacune des trois oscillations de la molécule à pulsation dégénérée. Chacune des composantes $\mathcal{E}_j$ amorce l'oscillation de l'atome de carbone d'amplitude proportionnelle à $\mathcal{E}_j$ et possédant un même coefficient de proportionnalité $\varkappa$. Aussi $\mathbf{u}_5 = \varkappa \mathcal{E}$ et $|\mathbf{u}_5|$ sont-ils indépendants de l'orientation de la molécule. On peut de même se convaincre que les amplitudes d'oscillations des atomes d'hydrogène $|\mathbf{u}_{1,2,3,4}|$ sont également indépendantes de l'orientation de la molécule et sont parallèles au vecteur $\mathcal{E}$.

§ 7. Oscillations de chaînes linéaires

7.1. La fonction de Lagrange du système

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{N} \dot{x}_n^2 - \frac{k}{2} \left[x_1^2 + \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1})^2 + x_N^2 \right], \qquad (1)$$

où x_n est l'écartement de la n-ième particule de la position d'équilibre. Introduisons également la coordonnée de la position d'équilibre de la n-ième particule $X_n = na$, où a est la longueur d'équilibre d'un ressort. Le système d'équations de Lagrange

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0, \\ &m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 2, 3, \ldots, N-1, \\ &m\ddot{x}_N + k(2x_N - x_{N-1}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

est équivalent au système

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N \tag{3}$$

si l'on ajoute la condition supplémentaire

$$x_0 = x_{N+1} \equiv 0 \tag{4}$$

Des considérations physiques poussent à admettre que les oscillations naturelles doivent être des ondes stationnaires. Il est toutefois plus commode de poser

$$x_n = Ae^{i(\omega t \pm n\varphi)}. \tag{5}$$

Avec ce choix, le système de N équations se ramène à une seule équation

$$\omega^2 = 4\frac{k}{m}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \tag{6}$$

qui définit la liaison de la pulsation à la différence de phases d'oscillations des particules adjacentes φ. La signification de la substitution (5) réside dans le choix pour x_n d'une solution sous forme d'onde progressive avec vecteur d'onde $p = \varphi/a$, vu que $n\varphi = nap = pX_n$. L'équation (6) établit ainsi la liaison entre la pulsation et le vecteur d'onde.

On peut satisfaire aux conditions (4) en tirant la superposition d'ondes $x_n = Ae^{i(\omega t - n\varphi)} + Be^{i(\omega t + n\varphi)}$ progressant dans les deux sens. La condition $x_0 = 0$ donne $A = -B$ ou $x_n = 2iB \sin(n\varphi)\, e^{i\omega t}$, c'est-à-dire une onde stationnaire. De la condition à l'autre bout $x_{N+1} = 0$ on tire les valeurs possibles des pulsations (« spectre des pulsations »).

L'équation $\sin(N+1)\varphi = 0$ aboutit à N solutions indépendantes

$$\varphi_s = \frac{\pi s}{N+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, N. \tag{7}$$

En effet $s = 0$, $s = N + 1$ fournissent des solutions nulles, tandis que pour $s = N + l$ la phase $\varphi_{N+l} = -\varphi_{N-l+2} + 2\pi$, c'est-à-dire que les solutions répondant à $s = N + l$ s'expriment en fonction des solutions répondant à $s = N - l + 2$.

A partir de (6) et (7) on trouve N pulsations différentes

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\varphi_s}{2} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{\pi s}{2(N+1)}, \quad s = 1, 2, \ldots, N. \quad (8)$$

Sur la figure 136 les différentes pulsations se placent en points discontinus sur la sinusoïde. Le vecteur de l'oscillation naturelle correspondant à la s-ième pulsation

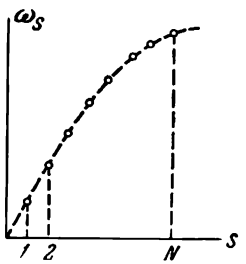


Fig. 136

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \begin{pmatrix} \sin\varphi_s \\ \sin 2\varphi_s \\ \ldots \\ \sin N\varphi_s \end{pmatrix} q_s(t), \quad (9)$$

où

$$q_s(t) = \mathrm{Re}\,(2iB_s e^{i\omega_s t}) = C_s \cos(\omega_s t + \alpha_s)$$

est la s-ième coordonnée normale, quant au facteur

$$\sqrt{\frac{2}{N+1}} = \left[\sum_{n=1}^{N} \sin^2 n\varphi_s\right]^{-\frac{1}{2}}$$

il a été introduit à des fins de normalisation : $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_{s'}) = \delta_{ss'} q_s^2$. La solution générale est fournie par superposition de toutes les oscillations naturelles

$$x_n = \sum_{s=1}^{N} \sqrt{\frac{2}{N+1}}\, q_s(t) \sin n\varphi_s.$$

La matrice de passage de x_n à q_s

$$U_{ns} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\frac{\pi n s}{N+1}$$

est une matrice orthogonale transformant la fonction de Lagrange en une somme de carrés répondant au choix de N oscillateurs différents

$$L = \sum_{s=1}^{N} L_s(q_s, \dot{q}_s), \quad L_s(q_s, \dot{q}_s) = \frac{m}{2}(\dot{q}_s^2 - \omega_s^2 q_s^2).$$

7.2. Les équations de mouvement pour ce système sont celles des équations (3) du problème précédent avec la condition complé-

mentaire que $x_0 = 0$, $x_N = x_{N+1}$. Donc

$$\varphi_s = \frac{(2s-1)\pi}{2N+1}, \quad s = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2(2N+1)},$$

$$x_n = \sum_n \sin n\varphi_s \cdot A_s \cos(\omega_s t + \alpha_s).$$

Le cas particulier de $N = 2$ voir au problème 6.1.

7.3. Les équations de mouvement coïncident avec les équations (3) du problème 7.1 avec la condition supplémentaire que $x_0 = x_N$ et $x_{N+1} = x_1$. Donc

$$\varphi_s = \frac{2\pi s}{N}, \quad s = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{s\pi}{N},$$

les pulsations ω_s et ω_{N-s} coïncidant, quant aux vecteurs d'onde qui y correspondent, ils diffèrent par le signe de $\varphi_s = 2\pi - \varphi_{N-s}$. La pulsation $\omega_0 = 0$ répond au mouvement de toutes les particules lancées sur l'anneau à une vitesse constante. Le système comporte des oscillations de la forme

$$x_n^{(s)} = \operatorname{Re} A_s e^{i(\omega_s t - n\varphi_s)}, \tag{1}$$

autrement dit, des ondes progressant sur l'anneau. La double dégénérescence des pulsations mentionnée plus haut correspond aux ondes se propageant sur l'anneau dans des sens différents. La superposition de deux de ces ondes de même amplitude produit une onde stationnaire

$$x_n^{(s)} \pm x_n^{(N-s)} = 2|A_s| \begin{cases} \cos n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \\ \sin n\varphi_s \sin(\omega_s t + \alpha_s). \end{cases} \tag{2}$$

Ce sont justement des oscillations naturelles (tous les points se déplacent en phase ou en opposition de phase).

Exprimée en coordonnées normales correspondantes

$$x_n = \sum_{s=1}^{R} (q_{s1} \cos n\varphi_s + q_{s2} \sin n\varphi_s) + q_0,$$

$$R = \frac{N-1}{2}, \quad N \text{ étant impair}, \tag{3}$$

la fonction de Lagrange se réduit à la forme diagonale :

$$L = \frac{Nm}{2} \left\{ \dot{q}_0^2 + \sum_{s=1}^{R} [\dot{q}_{s1}^2 + \dot{q}_{s2}^2 - \omega_s^2 (q_{s1}^2 + q_{s2}^2)] \right\}. \tag{4}$$

(Si le nombre de particules est pair, les formules (3), (4) doivent être modifiées quelque peu vu que la pulsation $\omega_{N/2}$ n'est pas dégénérée; la formule (1) pour $s = N/2$ détermine aussitôt l'onde stationnaire.)

Il est intéressant de noter que les rotations dans les plans q_{s1}, q_{s2}:

$$q_{s1} = q'_{s1} \cos \beta_s - q''_{s2} \sin \beta_s,$$

$$q_{s2} = q'_{s1} \sin \beta_s + q''_{s2} \cos \beta_s,$$

qui conservent la forme (4) à la fonction de Lagrange, correspondent au déplacement des nœuds d'ondes stationnaires:

$$x_n = q_0 + \sum_{s=1}^{R} [q'_{s1} \cos (n\varphi_s - \beta_s) + q'_{s2} \sin (n\varphi_s - \beta_s)].$$

Pour des ondes progressives (1) le flux moyen d'énergie suivant l'anneau (voir problème 6.9) *)

$$S_{\text{moy}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} k (x_{n-1} - x_n) \dot{x}_n \, dt = \frac{1}{2} k \, | A |^2 \omega \sin \varphi,$$

tandis que la vitesse de groupe

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dp} = \sqrt{\frac{k}{m}} \, a \cos \frac{\varphi}{2},$$

où a est la longueur d'équilibre d'un ressort, $p = \varphi/a$, le vecteur d'onde. L'énergie

$$E = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{N} \dot{x}_n^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{N} (x_n - x_{n-1})^2 =$$

$$= 2N \, | A |^2 k \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} N m \omega^2 | A |^2,$$

et, par suite,

$$\frac{E}{Na} v_{\text{gr}} = S_{\text{moy}}.$$

7.4. a) Les équations de mouvement sont:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_{2n-1} + k (2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n}) = 0, \\ M\ddot{x}_{2n} + k (2x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n+1}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

avec $x_0 = x_{2N+1} = 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

*) Pour abréger, on s'abstient plus loin d'écrire l'indice s. Pour le calcul du flux S_{moy} et de l'énergie E, il est commode d'utiliser la forme complexe en s'adressant aux formules empruntées à [2], § 48.

Cherchons la solution sous forme d'ondes progressives de différentes amplitudes

$$x_{2n-1} = Ae^{i[\omega t \pm (2n-1)\varphi]},$$
$$x_{2n} = Be^{i[\omega t \pm 2n\varphi]}. \tag{2}$$

Pour déterminer A et B on obtient un système d'équations homogènes

$$(-m\omega^2 + 2k)A - k(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})B = 0,$$
$$-k(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})A + (-M\omega^2 + 2k)B = 0, \tag{3}$$

ne donnant des solutions non triviales qu'au cas où le déterminant devient nul. Cette condition détermine la liaison de la pulsation à la différence de phases d'oscillations de particules adjacentes

$$\omega^2_{(\mp)} = \frac{k}{\mu}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM}\sin^2\varphi}\right), \quad \mu = \frac{mM}{m+M}. \tag{4}$$

Aux conditions complémentaires ne satisfont que des combinaisons linéaires déterminées d'ondes progressives (2), à savoir:

$$x_{2n-1} = A_s \sin(2n-1)\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s),$$
$$x_{2n} = B_s \sin 2n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s),$$

où $\varphi_s = \frac{\pi s}{2N+1}$. Vu que $\varphi_{2N+1-s} = \pi - \varphi_s$, les différentes pulsations, après le choix d'un signe déterminé dans (4), ne sont obtenues que pour $s = 1, 2, \ldots, N$. Sur la figure 137(pour le cas où $M > m$) elles se placent sous forme de points discontinus sur deux courbes différentes, l'une d'elles ($\omega_{(-)}$) est généralement dite « acoustique » et l'autre ($\omega_{(+)}$) « optique ».

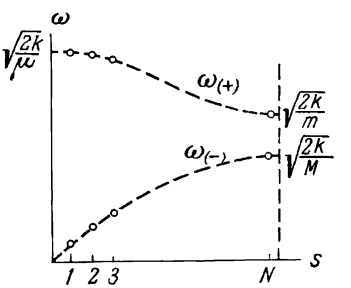


Fig. 137

La solution générale prend la forme

$$x_{2n-1} = \sum_{s=1}^{N} \sin(2n-1)\varphi_s [A_{(+)s}\cos(\omega_{(+)s}t + \alpha_s) + A_{(-)s}\cos(\omega_{(-)s}t + \beta_s)],$$

$$x_{2n} = \sum_{s=1}^{N} \sin 2n\varphi_s [B_{(+)s}\cos(\omega_{(+)s}t + \alpha_s) + B_{(-)s}\cos(\omega_{(-)s}t + \beta_s)],$$

où $A_{(\pm)s}$ et $B_{(\pm)s}$ sont, selon (3), liés par la relation

$$B_{(\pm)s} = \frac{2k - m\omega^2_{(\pm)s}}{2k\cos\varphi_s} A_{(\pm)s}.$$

Il est remarquable que $B_{(-)s}$ et $A_{(-)s}$, correspondant aux pulsations acoustiques, possèdent les mêmes signes, tandis que $B_{(+)s}$ et $A_{(+)s}$ des pulsations optiques ont des signes opposés (c'est-à-dire que les particules adjacentes de masses m et M oscillent en opposition

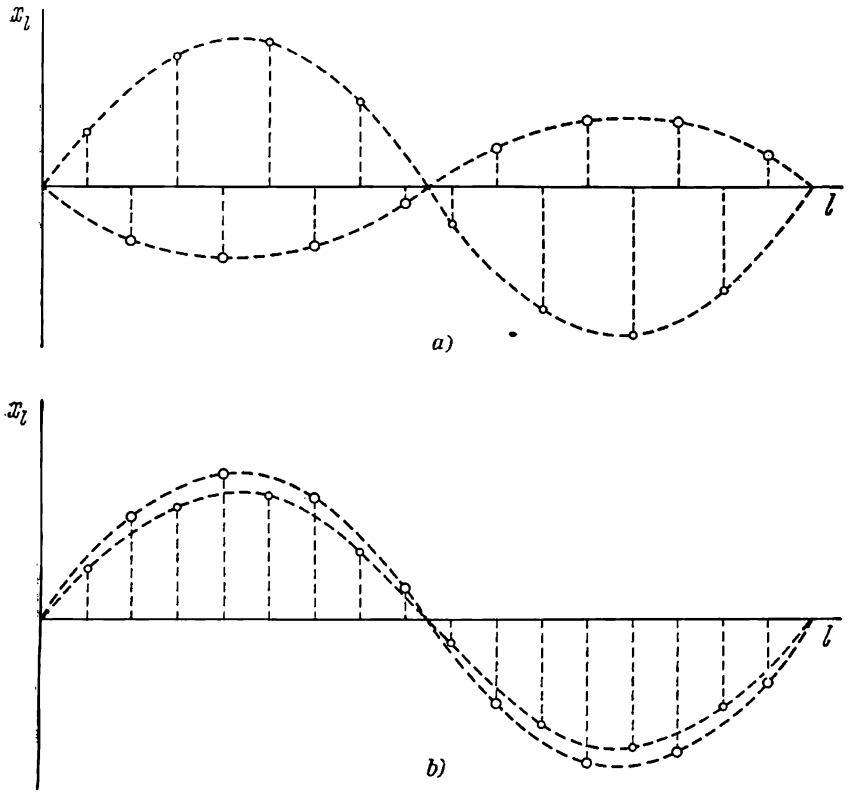


Fig. 138

de phase). La figure 138 fournit la distribution des amplitudes d'oscillations pour le cas où $N = 10$, $s = 2$; sur l'axe des ordonnées figurent les numéros des particules, tandis que sur celui des abscisses, les amplitudes qui leur correspondent (a pour les oscillations acoustiques et b pour les oscillations optiques).

De quelle manière peut-on déduire, en partant des résultats de ce problème, le cas limite de $m = M$ (voir problème 7.1)?

b) Les oscillations naturelles sont

$$x_{2n}^{(s)} = A_s \sin 2n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s),$$

$$x_{2n-1}^{(s)} = A_s \frac{K \sin 2n\varphi_s + k \sin(2n-2)\varphi_s}{k + K - m\omega_s^2} \cos(\omega_s t + \alpha_s),$$

où

$$\omega_s^2 = \frac{1}{m}\left[K + k \mp \sqrt{(K-k)^2 + 4Kk\cos^2\varphi_s}\right],$$

tandis que φ_s se détermine à partir de l'équation

$$\operatorname{tg}(2N+1)\varphi_s = -\frac{K-k}{K+k}\operatorname{tg}\varphi_s, \quad s = 1, 2, \ldots, N,$$

$$0 < \varphi_s < \frac{\pi}{2}.$$

La figure 139, *a* (pour $K > k$) représente les branches optique et acoustique des pulsations.

Comment doit-on passer au cas limite de $K = k$?

c) La quantité $\varphi_s = \frac{\pi s}{2(N+1)}$; pour $s = 1, 2, \ldots, N$, on obtient $2N$ oscillations naturelles et pulsations propres ayant l'as-

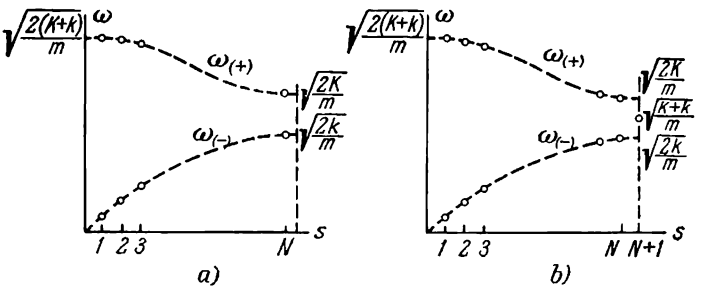


Fig. 139

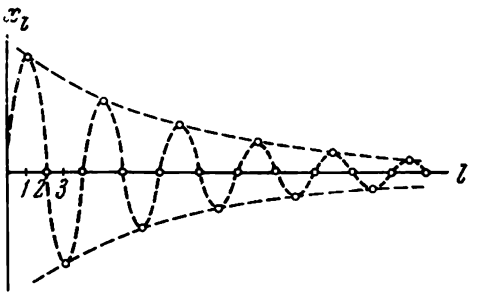


Fig. 140

pect du point b) (fig. 139, *b*). Comment trouver l'oscillation naturelle manquante, la plus intéressante, où $x_{2n} = 0$, $x_{2n-1}K = -x_{2n+1}k$, dont la pulsation est $\omega_0^2 = \frac{K+k}{m}$ se dispose dans la « zone interdite » entre les branches optique et acoustique?

La figure 140 fournit la distribution des amplitudes de cette oscillation, où sur l'axe des abscisses sont portés les numéros des parti-

cules et sur l'axe des ordonnées les amplitudes d'oscillations qui leur correspondent. Les particules possédant des numéros pairs sont au repos, tandis que les particules voisines, aux numéros impairs, oscillent en opposition de phase avec des amplitudes qui s'amortissent exponentiellement avec l'éloignement du bout gauche de la chaîne (« phonon superficiel »).

7.5. a) La solution des équations de mouvement

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N \qquad (1)$$

(conditions complémentaires $x_0 = 0$, $x_{N+1} = a \cos \gamma t$) sera recherchée sous forme d'ondes stationnaires $x_n = A \sin n\varphi \cos \gamma t$, de façon à satisfaire aussitôt la première condition complémentaire. Alors, en partant de la seconde condition, on obtient la constante $A = a/\sin(N+1)\varphi$, tandis que les équations (1) donnent le « vecteur d'onde » φ de l'onde stationnaire

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k}.$$

Pour $\gamma^2 < \frac{4k}{m}$ les oscillations permanentes

$$x_n = a \frac{\sin n\varphi}{\sin(N+1)\varphi} \cos \gamma t \qquad (2)$$

présentent une grande amplitude si le dénominateur $\sin(N+1)\varphi$ est proche de zéro. Mais c'est justement la condition qui détermine le spectre de pulsation propre ω_s (voir problème 7.1), c'est à-dire que dans ce cas on se rapproche de la résonance $\gamma \approx \omega_s$. Pour $\gamma \ll \omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi}{2(N+1)}$ les oscillations (2) correspondent à une lente extension et compression de tous les ressorts en bloc:

$$x_n = a \frac{n}{N+1} \cos \gamma t.$$

Si $\gamma^2 > \frac{4k}{m}$, alors en portant dans (2) $\varphi = \pi - i\psi$, on obtient

$$x_n = (-1)^{N+1+n} a \frac{\operatorname{sh} n\psi}{\operatorname{sh}(N+1)\psi} \cos \gamma t,$$

où $\operatorname{ch}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k}$. Les amplitudes d'oscillations des particules diminuent (pour $n\psi \gg 1$, de façon exponentielle) du côté du bout gauche de la chaîne. Le caractère naturel de ce résultat est particulièrement frappant pour $\gamma^2 \gg \frac{4k}{m}$, quand la pulsation de la force imposée se dispose beaucoup plus haut que le spectre des pulsations normales. Dans ce cas la particule extrême droite oscille avec une petite amplitude en opposition de phase avec la force imposée, tandis

que la $(N-1)$-ième particule se trouve, en première approximation, au repos. Ensuite, on peut considérer le mouvement de la $(N-1)$-ième particule comme une oscillation forcée amorcée par la force imposée de grande pulsation émanant de la N-ième particule, etc.

Notons que dans les phénomènes de réflexion interne totale on observe un amortissement analogue de l'onde (par exemple, lors de la réflexion des ondes courtes sur l'ionosphère).

Quel est l'aspect de l'oscillation permanente au cas où $\gamma^2 = \frac{4k}{m}$?

b) $$x_n = a\,\frac{\cos\left(N-n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos\left(N+\frac{1}{2}\right)\varphi}\cos\gamma t,$$

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k} \quad \text{pour} \quad \gamma^2 < \frac{4k}{m},$$

$$x_n = (-1)^n\, a\,\frac{\operatorname{sh}\left(N-n+\frac{1}{2}\right)\psi}{\operatorname{sh}\left(N+\frac{1}{2}\right)\psi}\cos\gamma t,$$

$$\operatorname{ch}^2\frac{\psi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k} \quad \text{pour} \quad \gamma^2 > \frac{4k}{m}.$$

7.6. Si la pulsation de la force imposée se dispose dans le domaine des pulsations propres acoustiques $0 < \gamma^2 < 2k/M$ ou dans le domaine des pulsations propres optiques $\frac{2k}{m} < \gamma^2 < \frac{2k}{\mu}$ (voir problème 7.4a), les oscillations permanentes sont alors de la forme

$$x_{2n-1} = a\,\frac{\sin(2n-1)\varphi}{\sin(2N+1)\varphi}\cos\gamma t,$$

$$x_{2n} = \pm\sqrt{\frac{2k-m\gamma^2}{2k-M\gamma^2}}\,a\,\frac{\sin 2n\varphi}{\sin(2N+1)\varphi}\cos\gamma t,$$

où $\cos^2\varphi = \frac{(2k-M\gamma^2)(2k-m\gamma^2)}{4k^2}$, tandis que le signe supérieur (inférieur) correspond à la pulsation γ se disposant dans le domaine des pulsations propres acoustiques (optiques).

Pour des pulsations $\frac{2k}{M} < \gamma^2 < \frac{2k}{m}$, se trouvant dans la «zone interdite»,

$$x_{2n-1} = (-1)^{N+n}\,a\,\frac{\operatorname{ch}(2n-1)\psi}{\operatorname{ch}(2N+1)\psi}\cos\gamma t,$$

$$x_{2n} = (-1)^{N+n}\,a\sqrt{\frac{2k-m\gamma^2}{M\gamma^2-2k}}\,\frac{\operatorname{sh}2n\psi}{\operatorname{ch}(2N+1)\psi}\cos\gamma t,$$

$$\operatorname{sh}^2\psi = \frac{(2k-m\gamma^2)(M\gamma^2-2k)}{4k^2}.$$

et pour les pulsations $\gamma^2 > 2k/\mu$, se disposant plus haut que la frontière de la branche optique,

$$x_{2n-1} = a\,\frac{\operatorname{sh}(2n-1)\chi}{\operatorname{sh}(2N+1)\chi}\cos\gamma t,$$

$$x_{2n} = -a\sqrt{\frac{2k-m\gamma^2}{2k-M\gamma^2}}\,\frac{\operatorname{sh}2n\chi}{\operatorname{sh}(2N+1)\chi}\cos\gamma t,$$

$$\operatorname{ch}^2\chi = \frac{(M\gamma^2-2k)(m\gamma^2-2k)}{4k^2},$$

les oscillations s'amortissent vers le bout gauche de la chaîne.

7.7. a) La solution des équations de mouvement

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1}$$

$$m_N\ddot{x}_N + k(2x_N - x_{N-1}) = 0 \tag{2}$$

(condition complémentaire $x_0 = 0$) sera recherchée sous forme d'ondes stationnaires:

$$\begin{aligned} x_n &= A\sin n\varphi\cos(\omega t+\alpha), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \\ x_N &= B\cos(\omega t+\alpha). \end{aligned} \tag{3}$$

A partir de (1) on tire la liaison

$$\frac{4k}{m}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \omega^2. \tag{4}$$

Des équations (1) et (2), compte tenu de (3) et (4), on obtient le système

$$A\sin N\varphi - B = 0,$$

$$-A\sin(N-1)\varphi + \left(-\frac{4m_N}{m}\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\right)B = 0.$$

D'où $B = A\sin N\varphi$, tandis que le paramètre φ constitue une solution de l'équation transcendante

$$\sin N\varphi\left(\frac{4m_N}{m}\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2 - \cos\varphi\right) = \cos N\varphi\sin\varphi. \tag{5}$$

Pour $m_N \gg m$, outre les oscillations naturelles évidentes, quand la particule m_N est comme au repos ($\sin N\varphi_s \ll 1$),

$$x_n^{(s)} = A_s\sin n\varphi_s\cos(\omega_s t+\alpha_s), \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\operatorname{tg} N\varphi_s \approx \frac{m}{2m}\cos\frac{\varphi_s}{2}, \quad s = 1, 2, \ldots, N-1,$$

il existe des oscillations naturelles au cours desquelles les amplitudes des particules décroissent linéairement vers le bout gauche de la

chaîne,

$$x_n^{(N)} = B\frac{n}{N}\cos(\omega_N t + \alpha_N),\ \omega_N^2 = \frac{k}{m_N}\left(1 + \frac{1}{N}\right).$$

La particule m_N oscille alors entre les ressorts de rigidité k (à droite) et de rigidité k/N (à gauche). Le fait que l'équation (5) possède cette solution s'établit par le raisonnement suivant. En supposant φ petit et en ne conservant que les termes principaux, on obtient de (5) $\varphi^2 = \frac{m}{m_N}\left(1 + \frac{1}{N}\right)$, ce qui est en accord complet avec l'hypothèse faite.

Pour $m_N \ll m$ on obtient les oscillations banales typiques du système de $(N-1)$-ième particule avec ressort de rigidité $k/2$ à l'extrémité droite $\left(\text{le paramètre } \varphi_s \text{ et les pulsations } \omega_s \text{ se déterminant de l'équation } \operatorname{tg} N\varphi = -\frac{\sin\varphi}{2-\cos\varphi}\right)$. En outre, il existe des oscillations naturelles au cours desquelles les amplitudes des particules décroissent vers le bout gauche de la chaîne

$$x_n^{(N)} = (-1)^{N+n} B\frac{\operatorname{sh} n\psi}{\operatorname{sh} N\psi}\cos(\omega_N t + \alpha_N),$$

$$\operatorname{ch}^2\frac{\psi}{2} = \frac{m}{2m_N} \gg 1, \quad \omega_N^2 = \frac{2k}{m_N}.$$

De façon formelle la valeur du paramètre ψ peut être obtenue sur la base de l'équation (5) en réalisant la substitution $\varphi = \pi - i\psi$ et en posant ψ grand. Cette oscillation naturelle peut être étudiée, en première approximation, comme une oscillation banale d'une particule de petite masse, les autres particules demeurant au repos, puis on procède à l'étude du mouvement des particules restantes, considéré comme des oscillations entretenues sous l'effet d'une force de haute fréquence $kx_N = kB\cos(\omega_N t + \alpha_N)$ appliquée à l'extrémité droite de la chaîne composée de $N-1$ particules identiques (voir problème 7.5a).

b) Pour $k_{N+1} \ll k$ la solution se confond avec celle du problème 7.2. Pour $k_{N+1} \gg k$ il y a des oscillations naturelles pour lesquelles la N-ième particule est presque immobile:

$$x_n^{(s)} = A_s \sin n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \quad \omega_s^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\frac{\varphi_s}{2},$$

$$\varphi_s \approx \frac{s\pi}{N}, \quad s = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Le paramètre φ_s se détermine sur la base de l'équation

$$\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{k_{N+1}}{k}\right)\sin N\varphi = \cos N\varphi \sin\varphi, \tag{6}$$

qui, dans l'approximation adoptée, prend la forme

$$\operatorname{tg} N\varphi = -\frac{k}{k_{N+1}} \sin \varphi.$$

L'équation (6) admet encore une solution qu'on peut obtenir en posant $\varphi = \pi - i\psi$ et en admettant ψ grand. Dans ce cas on a

$$x_n^{(N)} = (-1)^{N+1} B_N \frac{\operatorname{sh} n\psi}{\operatorname{sh} N\psi} \cos(\omega_N t + \alpha_N),$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{k_{N+1}}{4k}, \quad \omega_N^2 = \frac{k_{N+1}}{m},$$

autrement dit, les amplitudes des particules décroissent vers le bout gauche de la chaîne.

De quelle façon peut-on obtenir cette dernière oscillation sur la base des résultats obtenus au problème 7.5 ?

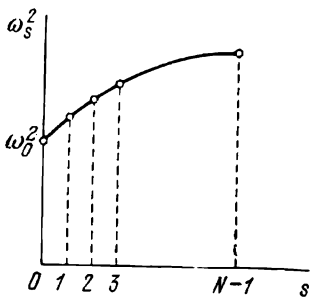


Fig. 141

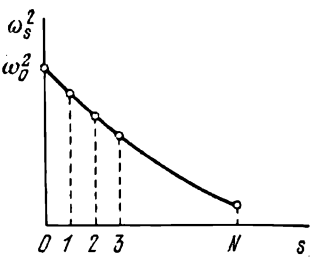


Fig. 142

7.8. Soit φ_n l'angle d'écart du n-ième pendule de la verticale.

a) L's-ième oscillation naturelle est

$$\varphi_n = A_s \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \psi_s \cdot \cos(\omega_s t + \alpha_s),$$

où le spectre de fréquences (fig. 141) commence avec la valeur $\omega_0 = \sqrt{g/l}$:

$$\omega_s^2 = \frac{g}{l} + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\psi_s}{2},$$

$$\psi_s = \frac{\pi s}{N}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

b) Il est évident que pour $b - a = 0$ tous les pendules (dans l'approximation linéaire) oscillent indépendamment l'un de l'autre avec la pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Avec l'accroissement du paramètre $b - a$, au début la force du ressort restaurant la position d'équilibre de la pesanteur s'atténue, puis commence à « bousculer » les pendules

voisins en déstabilisant les petites oscillations des pendules au voisinage de la verticale.

La fonction de Lagrange du système est

$$L=\frac{1}{2}ml^2\sum_{n=1}^{2N}\dot{\varphi}_n^2-U,\quad U=\sum_{n=1}^{2N}\left(-mgl\cos\varphi_n+\frac{kr_n^2}{2}\right),$$

où l'allongement du n-ième ressort (en posant $l\,|\,\Delta_n\,|\ll a$) est

$$r_n=\sqrt{a^2+4l^2\sin^2\frac{\Delta_n}{2}}-b\approx a-b+\frac{l^2}{2a}\Delta_n^2-\frac{l^2(a^2+3l^2)}{24a^3}\Delta_n^4,$$

$$\Delta_n=\varphi_n-\varphi_{n+1}.$$

A la précision jusqu'au termes φ_n^4 inclus près

$$U=\frac{1}{2}mgl\sum_n\left(\varphi_n^2-\alpha\Delta_n^2-\frac{1}{12}\varphi_n^4+\beta\Delta_n^4\right)+\text{const},$$

$$\alpha=\frac{(b-a)\,kl}{amg},\quad \beta=\frac{1}{12}\alpha+\frac{kbl^3}{4mga^3}. \tag{1}$$

Les équations de mouvement dans l'approximation linéaire en φ_n

$$\ddot{\varphi}_n+\frac{g}{l}\left[\varphi_n-\alpha(2\varphi_n-\varphi_{n+1}-\varphi_{n-1})\right]=0$$

ont une solution sous forme d'ondes progressives

$$\varphi_n=Ae^{i(\omega t\pm n\psi)} \tag{2}$$

de pulsations (voir fig. 142)

$$\omega_s^2=\frac{g}{l}\left(1-4\alpha\sin^2\frac{\psi_s}{2}\right),\quad \psi_s=\frac{\pi s}{N},\quad s=0,1,\ldots,N,$$

les pulsations ω_0 et ω_N étant non dégénérées, quant aux autres, elles sont doublement dégénérées.

Il s'ensuit que pour

$$4\alpha-1>0,\quad \text{ou}\quad b-a>\frac{mga}{4kl}, \tag{3}$$

les oscillations sont instables, certains ω_s^2 devenant négatifs. La pulsation ω_N s'annule la première. Il lui correspond $\psi_N=\pi$, c'est-à-dire une oscillation naturelle du type « soufflet » au cours de laquelle les particules voisines oscillent en opposition de phase : $\varphi_n=-\varphi_{n-1}$. Il est donc naturel de rechercher la nouvelle position d'équilibre φ_{n0} sous forme de « soufflet » :

$$\varphi_{10}=-\varphi_{20}=\varphi_{30}=-\varphi_{40}=\ldots=-\varphi_{2N0}=\varphi. \tag{4}$$

La valeur de φ s'obtient à partir de la condition d'équilibre $\frac{\partial U}{\partial \varphi_n} = 0$, ou

$$\varphi_n - \alpha(2\varphi_n - \varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) - \frac{1}{6}\varphi_n^3 + 2\beta(\varphi_n - \varphi_{n+1})^3 + \\ + 2\beta(\varphi_n - \varphi_{n-1})^3 = 0, \quad (5)$$

soit

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{6(4\alpha-1)}{192\beta-1}}.$$

Étudions maintenant les petites oscillations près de la nouvelle position d'équilibre (4). Introduisons les petites élongations

$$x_n = \varphi_n - \varphi_{n0},$$

alors avec la précision jusqu'à x_n^2 inclus près, l'énergie potentielle (1) devient égale à

$$U = \frac{1}{2}mgl\sum_n\left[\left(1-\frac{1}{2}\varphi^2\right)x_n^2 - (\alpha - 24\beta\varphi^2)\times \\ \times(x_n - x_{n+1})^2\right] + \text{const}. \quad (6)$$

En comparant (1) et (6), il est aisé de voir que x_n a une solution de la même forme que φ_n (2) de pulsations

$$\omega_s^2 = \frac{g}{l}\left[1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - 4(\alpha - 24\beta\varphi^2)\sin^2\frac{\psi_s}{2}\right].$$

Or, maintenant, pour des petites valeurs de $\varphi^2 < \frac{\alpha}{24\beta} < \frac{1}{2}$ tous les ω_s^2 sont positifs (voir (3));

$$\omega_s^2 > \frac{g}{l}\left[1 - \frac{\varphi^2}{2} - 4(\alpha - 24\beta\varphi^2)\right] = \frac{2g}{l}(4\alpha - 1) > 0,$$

c'est-à-dire que les petites oscillations sont stables près de la nouvelle position d'équilibre.

Donc avec l'accroissement du paramètre α la configuration initiale des pendules verticaux devient celle d'un « soufflet ». Cette modification de symétrie rappelle la variation de symétrie des systèmes thermodynamiques au cours des transitions de phases de second ordre. L'analogue de α est dans ce cas le paramètre extérieur du type température, champ magnétique, etc. (voir, par exemple, [23]).

Il est bien entendu que l'équation (5) peut posséder également d'autres solutions non nulles, en dehors de celle fournie par (4). Par exemple, y satisfait la valeur de $\varphi_n = \sqrt{6}$ qui n'a toutefois pas de signification physique car elle répond à des grands angles d'écart, le développement de (1) n'étant vrai que pour des φ petits.

7.9. a) Le courant de la n-ième bobine sera désigné par $\dot{q}_n$. La fonction de Lagrange est

$$L=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left[\mathcal{L}\dot{q}_n^2-\frac{1}{C}(q_n-q_{n+1})^2\right]+Uq_1\cos\gamma t$$

(le courant à travers la résistance Z est noté par q_{N+1}). La résistance agglomérée $Z(\gamma)$ peut être introduite dans les équations de mouvement au moyen de la fonction dissipative *)

$$F=\frac{1}{2}Z\dot{q}_{N+1}^2.$$

Les équations de mouvement

$$\mathcal{L}\ddot{q}_1+\frac{1}{C}(q_1-q_2)=U\cos\gamma t, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}\ddot{q}_n+\frac{1}{C}(2q_n-q_{n-1}-q_{n+1})=0,\quad n=2,3,\ldots,N, \tag{2}$$

$$\frac{1}{C}(q_{N+1}-q_N)=Z\dot{q}_{N+1}. \tag{3}$$

La solution est recherchée sous forme de

$$q_n=\mathrm{Re}\,(Ae^{i\gamma t-in\varphi}),$$

en outre on peut considérer, sans porter atteinte à la généralité, que $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. De (2), (3), il vient

$$\pm\gamma\sqrt{\mathcal{L}C}=2\sin(\varphi/2), \tag{4}$$

$$Z=\frac{1}{i\gamma C}(e^{i\varphi}-1)=\pm\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}}\,e^{i\varphi/2}=$$

$$=\frac{i}{2}\gamma\mathcal{L}\pm\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{C}\left(1-\frac{1}{4}\mathcal{L}C\gamma^2\right)}. \tag{5}$$

Puisqu'il se produit dans la résistance Z une dissipation de l'énergie, on doit avoir $\mathrm{Re}\,Z>0$, c'est-à-dire que dans (5) et, partant, dans (4) doit être choisi le signe plus. En outre $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. L'amplitude peut être déduite de l'équation (1).

*) Remarquons que les équations de mouvement pour une chaîne de pulsation ω, présentant une tension harmonique, peuvent être obtenues sur la seule base de la « fonction dissipative »

$$F=\frac{1}{2}\sum_n Z_n(\omega)\,\dot{q}_n^2.$$

Les équations sont de la forme $\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_n}=0$ (la fonction de Lagrange est considérée comme nulle).

Pour $\gamma^2 > \mathscr{L}C/4$ la propagation des ondes progressives suivant la ligne fantôme est impossible (comp. avec problème 7.5a).

b) Les équations de mouvement

$$\mathscr{L}_1\ddot{q}_{2n-1}+\frac{1}{C}(2q_{2n-1}-q_{2n-2}-q_{2n})=0, \quad n=2, 3, \ldots, N,$$

$$\mathscr{L}_2\ddot{q}_{2n}+\frac{1}{C}(2q_{2n}-q_{2n-1}-q_{2n+1})=0, \quad n=1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

à la précision des notations près, coïncident avec les équations (1) du problème 7.4. En outre

$$\mathscr{L}_1\ddot{q}_n+\frac{1}{C}(q_1-q_2)=U\cos\gamma t, \tag{7}$$

$$\frac{1}{C}(q_{2N+1}-q_{2N})=-Z\dot{q}_{2N+1}. \tag{8}$$

La solution est recherchée sous la forme

$$\begin{aligned} q_{2n-1}&=Ae^{i\gamma t-i(2n-1)\varphi},\\ q_{2n}&=Be^{i\gamma t-i2n\varphi}. \end{aligned} \tag{9}$$

Sans porter atteinte à la généralité, considérons que $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. De (1) il vient

$$\begin{aligned} &(1-\gamma^2/\gamma_1^2)\,A-\cos\varphi\cdot B=0,\\ &\gamma_{1,2}^2=\frac{2}{\mathscr{L}_{1,2}C},\\ &\cos\varphi\cdot A-(1-\gamma^2/\gamma_2^2)\,B=0 \end{aligned} \tag{10}$$

d'où

$$\cos^2\varphi=(1-\gamma^2/\gamma_1^2)(1-\gamma^2/\gamma_2^2).$$

Soit, par exemple, $\gamma_1<\gamma_2$. Les conditions $0\leqslant\cos^2\varphi\leqslant 1$ sont satisfaites pour $0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_1$ (domaine d'ondes « acoustiques », comp. avec problème 7.4) et pour $\gamma_2\leqslant\gamma\leqslant\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}$ (domaines d'ondes « optiques »). En dehors de cette région la propagation des ondes progressives est impossible (comp. avec problème 7.6).

De la formule (8) on tire

$$Z=\frac{i}{\gamma C}-\frac{i}{\gamma C}\frac{B}{A}e^{i\varphi}=\frac{i}{\gamma C}\left(1-\frac{B}{A}\cos\varphi\right)+\frac{B}{A}\frac{\sin\varphi}{\gamma C}. \tag{11}$$

Ici, comme au point a), on doit avoir $\operatorname{Re} Z>0$, c'est-à-dire $\frac{B}{A}\sin\varphi>0$. Dans le domaine $\gamma\leqslant\gamma_1$ les amplitudes A et B ont même signe et, partant, $\varphi>0$. Dans le domaine $\gamma_2\leqslant\gamma\leqslant\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}$, au contraire, $B/A<0$ et $\varphi<0$. En portant dans (11) les valeurs

de B/A, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, on obtient en définitive

$$Z=\sqrt{\frac{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}{2C}\left(1-\frac{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2C}{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}\cdot\frac{\gamma^2}{2}\right)\frac{2-\mathcal{L}_1C\gamma^2}{2-\mathcal{L}_2C\gamma^2}}+\frac{i}{2}\gamma\mathcal{L}_1.$$

La valeur négative de φ dans le domaine des oscillations « optiques » signifie que la vitesse de phase de l'onde se propageant suivant la ligne de l'onde est dirigée de la résistance Z vers la source de tension. Quant à la vitesse de groupe déterminant le flux d'énergie (comp. avec problème 7.3), elle possède, naturellement, la direction (voir, par exemple, fig. 137 où $v_{\text{gr}} \backsim \frac{d\omega_{(+)}}{ds} < 0$).

7.10. Les équations d'oscillations d'un système discontinu (voir formule (3) du problème 7.1) après transformation prennent la forme

$$\ddot{x}_n-ka\frac{a}{m}\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{a}-\frac{x_n-x_{n-1}}{a}\right)\frac{1}{a}=0. \qquad (1)$$

La quantité $\frac{m}{a}=\frac{Nm}{Na}$ a à la limite la signification de densité linéaire ρ de la tige. L'allongement relatif du tronçon a, c'est-à-dire la grandeur $\frac{x_n-x_{n-1}}{a}$, est proportionnel à la force $F=ka\frac{x_n-x_{n-1}}{a}$ qui agit sur ce dernier, aussi à la limite ka a la signification de module d'élasticité de la tige $\varkappa$. Donc à la limite l'équation (1) devient une équation d'onde

$$\frac{\partial^2x(\xi,t)}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2x(\xi,t)}{\partial\xi^2}=0, \qquad (2)$$

où $v=\sqrt{\varkappa/\rho}$ prend le sens de vitesse de phase de l'onde.

Au lieu du système de N équations différentielles ordinaires on obtient une seule équation en dérivées partielles (comp. avec problème 4.29).

Remarquons que cette conclusion exige la formulation d'une hypothèse importante qui admet que la fonction $x_n(t)$ tend vers une limite déterminée $x(\xi, t)$ constituant une fonction suffisamment lisse.

7.11. Pour des a petits, on peut représenter de façon approchée l'élongation sous la forme $x_n=x(\xi,t)$, $x_{n\pm1}=x(\xi\pm a,t)=$ $=x(\xi,t)\pm a\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial\xi}+\frac{a^2}{2}\frac{\partial^2x(\xi,t)}{\partial\xi^2}\pm\frac{a^3}{6}\frac{\partial^3x(\xi,t)}{\partial\xi^3}+\ldots$ Dans ce cas l'équation (2) du problème 7.10 se transforme en l'équation

$$\frac{\partial^2x}{\partial t^2}-\frac{\varkappa}{\rho}\frac{\partial^2x}{\partial\xi^2}-\frac{\varkappa a^2}{12\rho}\frac{\partial^4x}{\partial\xi^4}=0. \qquad (1)$$

Tandis que chacune des équations (1) du problème 7.10 comprend les élongations des points voisins (action à grande distance), l'équation (1) du présent problème ne contient que l'élongation x du point ξ considéré (action à courte distance). Le terme $-\frac{\varkappa a^2}{12\rho}\frac{\partial^4x}{\partial\xi^4}$ de l'équa-

tion (1) correspond à la prise en compte approchée de la différence distinguant le système du système continu.

Pour plus de détails sur la dispersion spatiale et l'étude de l'équation (1) voir [19], ch. 4, § 4.

§ 8. Oscillations non linéaires

8.1. a) L'équation de mouvement

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3 \tag{1}$$

sera résolue à l'aide de la méthode d'approximations successives (comp. avec problème 6.34):

$$x = x_0 + \delta x = Ae^{i\omega_0 t} + A^* e^{-i\omega_0 t} + \delta x. \tag{2}$$

La «force»

$$-\beta x_0^3 = -\beta A^3 e^{3i\omega_0 t} - 3\beta A^2 A^* e^{i\omega_0 t} - 3\beta A A^{*2} e^{-i\omega_0 t} - \beta A^{*3} e^{-3i\omega_0 t}$$

comprend des termes de résonance

$$-3\beta A^2 A^* e^{i\omega_0 t} - 3\beta A A^{*2} e^{-i\omega_0 t} = -3\beta\,|A|^2 x,$$

qu'il est commode d'adjoindre au terme $\omega_0^2 x$ du premier membre de (1). Cela aboutit à la substitution

$$\omega_0^2 \to \omega^2 = \omega_0^2 + 3\beta\,|A|^2.$$

Pour δx on obtient l'équation

$$\ddot{\delta x} + \omega^2 \delta x = -\beta\,(A^3 e^{3i\omega t} + \text{nomb. conjugué}),$$

d'où

$$\delta x = \frac{\beta A^3}{8\omega^2} e^{3i\omega t} + \text{nomb. conjugué}.$$

Bref,

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \times \cos(3\omega t + 3\varphi), \quad A = \frac{1}{2} a e^{i\varphi}$$

(comp. avec [1], § 28). La figure 143 nous donne les graphiques de $x(t)$.

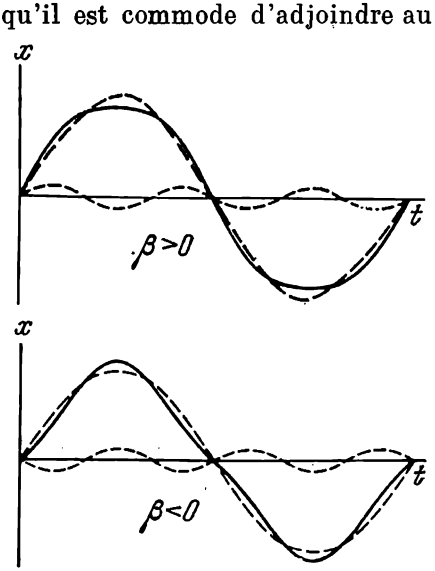


Fig. 143

Pour $\beta > 0$ les oscillations subissent une limitation, pour $\beta < 0$ les maximums deviennent plus aigus. Ces particularités des oscillations, ainsi que le signe de la correction à la pulsation peuvent aisément être déduits du graphique $U(x)$. Pour d'autres modes de solution voir problèmes 1.9 et 11.25c.

b) En résolvant le problème par le procédé du point a), on obtient

$$\delta x = \frac{\alpha A^2}{3\omega_0^2} e^{2i\omega_0 t} - \frac{2\alpha |A|^2}{\omega_0^2} + \frac{\alpha A^{*2}}{3\omega_0^2} e^{-2i\omega_0 t},$$

c'est-à-dire

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi).$$

L'altération des oscillations n'est pas symétrique (fig. 144).

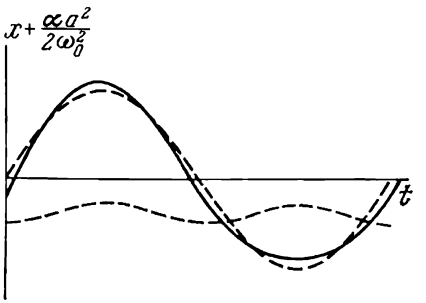


Fig. 144

Dans l'approximation suivante il faut tenir compte dans la « force » $-\alpha(x_0 + \delta x)^2$ du terme $-2\alpha x_0 \delta x$ contenant des termes de résonance

$$-\frac{2\alpha^2}{3\omega_0^2} A^2 A^* e^{i\omega_0 t} - \frac{2\alpha^2}{3\omega_0^2} A A^{*2} e^{-i\omega_0 t} + \frac{4\alpha^2 |A|^2}{\omega_0^2} x = \frac{10\alpha^2}{3\omega_0^2} |A|^2 x.$$

Cela aboutit à la substitution

$$\omega_0 \to \omega_0 - \frac{5\alpha^2 a^2}{12\omega_0^3}.$$

8.2.

$$x = a \cos \omega t - \frac{1}{4} \gamma a^2 \cos 2\omega t + \frac{1}{4} \gamma a^2;$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{\gamma^2 a^2 \omega_0}{16}.$$

8.3.

$$\varphi = \frac{a\Omega^2}{g - l\Omega^2} \cos \Omega t + \frac{a^2 \Omega^4}{12(g - l\Omega^2)(g - 4l\Omega^2)} \sin 2\Omega t$$

(les notations sont celles du problème 5.9).

8.4. $x = x^{(0)} + x^{(1)} + \ldots,$

$$x^{(0)} = -\frac{f_1 \cos \omega_1 t}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} + \frac{f_2 \cos \omega_2 t}{m(\omega_0^2 - \omega_2^2)},$$

$$x^{(1)} = -\frac{\alpha f_1^2}{2m\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} - \frac{\alpha f_2^2}{2m\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2} -$$
$$- \frac{\alpha f_1^2 \cos 2\omega_1 t}{2m(\omega_0^2 - 4\omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} - \frac{\alpha f_2^2 \cos 2\omega_2 t}{2m(\omega_0^2 - 4\omega_2^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2} -$$
$$- \frac{\alpha f_1 f_2 \cos(\omega_1 - \omega_2) t}{m[\omega_0^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2](\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)} -$$
$$- \frac{\alpha f_1 f_2 \cos(\omega_1 + \omega_2) t}{m[\omega_0^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2](\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)}.$$

Quelles sont les pulsations combinatoires qui apparaissent au cas où l'on tient compte de la correction anharmonique $\delta U = \frac{m\beta x^4}{4}$?

8.5. La fonction de Lagrange est

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(\sqrt{(l-y)^2 + x^2} - l_0)^2 - mgy =$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2 + 2\alpha x^2 y) + \ldots,$$

où

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad l = l_0 + \frac{mg}{k}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad \alpha = \frac{kl_0}{2ml^2}.$$

En continuant de procéder comme dans le problème 8.1, il vient

$$x = a\cos(\omega_1 t + \varphi) - \frac{\alpha ab}{\omega_2(2\omega_1 - \omega_2)}\cos(\omega_1 t + \omega_2 t + \varphi + \psi) +$$
$$+ \frac{\alpha ab}{\omega_2(2\omega_1 - \omega_2)}\cos(\omega_1 t - \omega_2 t + \varphi - \psi),$$
$$y = b\cos(\omega_2 t + \psi) + \frac{\alpha a^2}{2\omega_2^2} + \frac{\alpha a^2}{2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)}\cos(2\omega_1 t + 2\varphi).$$

Les corrections anharmoniques augmentent fortement pour $2\omega_1 \approx \omega_2$. Le cas de $2\omega_1 = \omega_2$ est étudié dans le problème 8.10.

8.6. a) La solution est recherchée sous la forme

$$x = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}.$$

En égalant les coefficients accompagnant $e^{i\omega t}$, il vient

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega + 3\beta|A|^2)A = \frac{1}{2}f,$$

d'où il s'ensuit

$$[(\omega_0^2 - \omega^2 + 3\beta|A|^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2]|A|^2 = \frac{f^2}{4}.$$

L'étude de cette équation, cubique en $|A|^2$, peut être menée de façon pareille à l'étude de l'équation analogue (29.4) faite dans [1].

8.7. a) La solution des équations d'oscillations

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 (1 + h \cos 2\omega t)\, x + \beta x^3 = 0 \tag{1}$$

est recherchée sous la forme

$$x = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

en ne conservant que les termes contenant $e^{\pm i\omega t}$ *). En égalant à zéro les coefficients accompagnant $e^{\pm i\omega t}$, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{h}{2}\,\omega_0^2 A + (\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\omega\lambda - 3\beta\,|A|^2)\,A^* = 0, \\ &\frac{h}{2}\,\omega_0^2 A^* + (\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\omega\lambda - 3\beta\,|A|^2)\,A = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Mais A n'est égal à zéro qu'à la condition que

$$\begin{vmatrix} \frac{h}{2}\,\omega_0^2 & \omega^2 - \omega_0^2 - 2i\omega\lambda - 3\beta\,|A|^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 + 2i\omega\lambda - 3\beta\,|A|^2 & \frac{h}{2}\,\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

d'où

$$|A|^2 = \frac{1}{3\beta}\left[\omega^2 - \omega_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2}\,\omega_0^2\right)^2 - (2\omega\lambda)^2}\right]. \tag{5}$$

De (3) on obtient **)

$$\begin{aligned} &\sin 2\varphi = \operatorname{Im}\frac{A}{A^*} = -\frac{4\lambda}{h\omega_0}, \\ &\cos 2\varphi = \mp\frac{2}{h\omega_0}\sqrt{\left(\frac{h}{2}\,\omega_0^2\right)^2 - (2\omega\lambda)^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Bref,

$$x = a\cos(\omega t + \varphi), \tag{7}$$

où

$$A = \frac{1}{2}\,ae^{i\varphi}.$$

La dépendance de $|A|^2$ de ω^2 est représentée sur la figure 145 (pour plus de netteté, posons $\beta > 0$). Dans certains domaines de pulsations

*) On admet que les termes à $e^{\pm 3i\omega t}$, de beaucoup plus petits, seront compensés par l'apport à (2) du troisième harmonique, comme il s'en suivra plus loin.

**) Les formules (6) déterminent la phase à la précision du terme $n\pi$ suivant près. Il ne sert à rien de tendre une plus grande précision, vu que la variation de la phase de π ne fait que traduire le décalage de l'origine des temps.

les amplitudes des oscillations permanentes peuvent se présenter en deux ou trois variantes (en comptant celle de l'amplitude zéro).

Les amplitudes correspondant aux tronçons AD et CD ne se concrétisent pas dans la réalité, car ces oscillations sont instables (la démonstration de ce fait relativement à AD voir au problème suivant, tandis que la stabilité des oscillations sur les tronçons ABC, CD et DE est étudiée dans [8]).

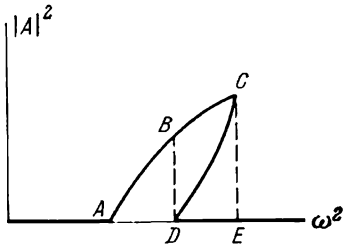


Fig. 145

b) Compte tenu du troisième harmonique, x prend la forme

$$x = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t} + Be^{3i\omega t} + B^* e^{-3i\omega t}. \tag{8}$$

On suppose que $|B| \ll |A|$, ce que confirmera le résultat. En portant (8) dans (1), séparons les termes contenant $e^{3i\omega t}$ tout en laissant tomber les produits de B par les petits paramètres. Il s'avère que

$$B = \left(\frac{h}{16} + \frac{\beta A^2}{8\omega^2}\right) A \tag{9}$$

et, en fait, $|B| \ll |A|$.

Donc

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) + b \cos(3\omega t + \psi), \tag{10}$$

où $b = 2|B|$, $\psi = \arg B$.

Il est aisé de remarquer que le cinquième harmonique possède une petitesse de deuxième ordre ($\sim h^2 A$), le septième, une petitesse de troisième ordre ($\sim h^3 A$), etc. C'est justement sur quoi s'appuye le procédé de calcul des amplitudes. Les harmoniques pairs n'apparaissent pas.

8.8. a) Recherchons la solution de l'équation sous forme

$$x(t) = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t, \tag{1}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions du temps variant lentement. Pour déterminer $a(t)$ et $b(t)$, formons le système d'équations (voir [1], § 27)

$$\begin{aligned} \dot{a} + \left(\omega - \omega_0 + \frac{h\omega_0}{4}\right) b &= 0 \\ \dot{b} - \left(\omega - \omega_0 - \frac{h\omega_0}{4}\right) a &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Si $|\omega_1 - \omega_0| < h\omega_0/4$, les solutions de ce système sont :

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha_1 (C_1 e^{-st} + C_2 e^{st}), \\ b(t) &= \alpha_2 (C_1 e^{-st} - C_2 e^{st}), \end{aligned} \tag{3}$$

où

$$s = \frac{1}{4}\sqrt{(h\omega_0)^2 - 16(\omega - \omega_0)^2}, \quad \alpha_{1,2} = \sqrt{h\omega_0 \pm 4(\omega - \omega_0)}.$$

De là on tire

$$x = C'e^{st}\cos(\omega t - \varphi) + C''e^{-st}\cos(\omega t + \varphi), \tag{4}$$

où $\operatorname{tg}\varphi = \alpha_1/\alpha_2$ (fig. 146).

Donc les oscillations s'accroissent en principe indéfiniment. La vitesse de cet accroissement, que caractérise la grandeur s, est effectivement petite. Dans les conditions réelles l'accroissement de l'amplitude des oscillations s'arrête, par exemple, dans le cas où devient

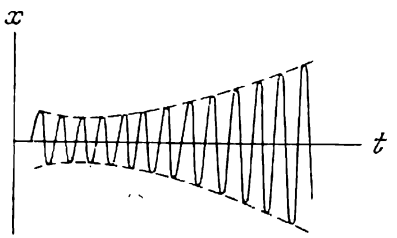


Fig. 146

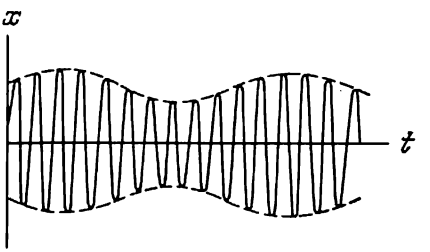


Fig. 147

important le rôle des corrections anharmoniques (voir problème 8.7) ou celui de l'influence inverse des oscillations sur l'installation, imposant des variations périodiques à la pulsation.

Il est utile d'attirer l'attention sur l'analogie entre le résultat obtenu et la solution singulière du problème sur les oscillations naturelles d'une chaîne de particules reliées par des ressorts de rigidité différente (problème 7.4c). L'inhomogénéité de période $2a$ le long de la chaîne entraîne un accroissement de l'amplitude de l'oscillation permanente le long de la chaîne, la « longueur d'onde » étant égale à $4a$ (fig. 140), ce qui constitue un phénomène analogue à l'accroissement de l'amplitude dans le temps avec variation périodique de la pulsation de l'oscillateur dans le temps.

L'analogie est encore plus marquée avec le problème 7.6. Au domaine d'instabilité relativement à la résonance paramétrique correspond la zone interdite du spectre d'oscillations de la chaîne.

A des équations analogues aboutit en mécanique quantique le problème du mouvement de la particule dans un champ périodique. Dans ce problème apparaissent également des « zones interdites » et des « états superficiels ».

b) Si $|\omega - \omega_0| > h\omega_0/4$, il vient alors

$$x = C\beta_1 \sin(\Omega t + \psi)\cos\omega t - C\beta_2 \cos(\Omega t + \psi)\sin\omega t,$$

où $\Omega = \frac{1}{4}\sqrt{16(\omega-\omega_0)^2 - (h\omega_0)^2}$,

$$\beta_{1,2} = \begin{cases} \sqrt{4(\omega-\omega_0) \pm h\omega_0} & \text{pour} \quad \omega > \omega_0, \\ \pm\sqrt{4(\omega_0-\omega) \pm n\omega_0} & \text{pour} \quad \omega < \omega_0. \end{cases}$$

Ces oscillations sont des battements :

$$x = C\sqrt{4|\omega-\omega_0| - h\omega_0\cos(2\Omega t + \psi)}\cos(\omega t + \theta),$$

où θ est la phase qui varie lentement (voir fig. 147). Si la pulsation se rapproche de la frontière du domaine d'instabilité, le taux de modulation des oscillations tend à être de 100 % , quant à la période, elle s'accroît indéfiniment.

Quelle est la forme des oscillations pour $|\omega - \omega_0| = h\omega_0/4$?

8.9. Soit $x = e^{i\omega_1 t}$ l'oscillation pour $0 < t < \tau$. Alors sur le tronçon $\tau < t < 2\tau$,

$$x = ae^{i\omega_2 t} + be^{-i\omega_2 t},$$

où a et b se déterminent sur la base de la condition de « raccordement » pour $t = \tau$:

$$x(\tau - 0) = x(\tau + 0), \quad \dot{x}(\tau - 0) = \dot{x}(\tau + 0),$$

d'où

$$a = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\omega_2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)\tau},$$

$$b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2)\tau}.$$

De façon analogue on trouve que pour $2\tau < t < 3\tau$

$$x = \alpha e^{i\omega_1 t} + \beta e^{-i\omega_1 t},$$

où

$$\alpha = e^{-i\omega_1\tau}\left(\cos\omega_2\tau + i\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\sin\omega_2\tau\right),$$

$$\beta = i\sin\omega_2\tau e^{3i\omega_1\tau}\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}.$$

Il est évident que l'oscillation de la forme

$$Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t} \tag{1}$$

pour $0 < t < \tau$ se transforme après une période 2τ en l'oscillation

$$A(\alpha e^{i\omega_1 t} + \beta e^{-i\omega_1 t}) + B(\alpha^* e^{-i\omega_1 t} + \beta^* e^{i\omega_1 t}) =$$
$$= (\alpha A + \beta^* B)e^{i\omega_1 t} + (\beta A + \alpha^* B)e^{-i\omega_1 t}.$$

Cherchons la combinaison linéaire (1) pour qu'après la période 2τ l'oscillation conserve sa forme à la précision jusqu'au facteur constant près :

$$(\alpha A+\beta^* B)\, e^{i\omega_1 t}+(\beta A+\alpha^* B)\, e^{-i\omega_1 t}=\mu\,(Ae^{i\omega_1 t'}+Be^{-i\omega t'}), \qquad (2)$$

avec $t'=t-2\tau$,

$$\alpha A+\beta^* B=\mu e^{-2i\omega_1\tau}A,$$
$$\beta A+\alpha^* B=\mu e^{2i\omega_1\tau}B.$$

Le système (2) possède une solution non triviale à la condition que

$$(\alpha-\mu e^{-2i\omega_1\tau})\,(\alpha^*-\mu e^{2i\omega_1\tau})-\beta\beta^*=0,$$

d'où

$$\mu_{1,2}=\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-1},$$

où

$$\gamma=\operatorname{Re}(\alpha e^{2i\omega_1\tau})=\cos\omega_1\tau\cos\omega_2\tau-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\sin\omega_1\tau\sin\omega_2\tau.$$

Après n périodes l'oscillation

$$x_{1,2}=A_{1,2}\,(e^{i\omega_1 t}+\lambda_{1,2}e^{-i\omega_1 t}), \quad 0<t<\tau,$$
$$\lambda_{1,2}=\mu_{1,2}\,\frac{e^{-2i\omega_1\tau}-\alpha}{\beta^*}$$

passe à

$$x_{1,2}(t)=\mu_{1,2}^n A_{1,2}\,(e^{i\omega_1 t'}+\lambda_{1,2}e^{-i\omega_1 t'}), \quad 0<t'=t-2n\tau<\tau.$$

Toute oscillation constitue une superposition d'oscillations de la forme $x_{1,2}$, en particulier l'oscillation réelle (qui seule a une signification physique immédiate) telle que

$$x(t)=Ae^{i\omega_1 t}+A^*e^{-i\omega_1 t}, \quad 0<t<\tau,$$

est la somme de $x_1(t)+x_2(t)$ avec

$$A_1=\frac{A^*-\lambda_2 A}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad A_2=\frac{\lambda_1 A-A^*}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Si $\gamma<1$, $|\mu_{1,2}|=1$ et les oscillations $x_{1,2}(t)$ (et avec elles $x(t)$) demeurent limitées.

Si par contre $\gamma>1$, $\mu_1>1$, l'amplitude des oscillations croissant indéfiniment. C'est justement le cas d'apparition de la résonance paramétrique. Il est aisé de se convaincre qu'au cas où la différence de pulsations est petite $|\omega_1-\omega_2|\ll\omega_1$ cette condition se vérifie, si les pulsations se rapprochent de $\pi n/\tau$:

$$|(\omega_1+\omega_2)\,\tau-2\pi n|<\frac{(\omega_1-\omega_2)^2\,\tau}{\omega_1+\omega_2}.$$

La figure 148 (empruntée à [20]) montre les domaines d'instabilité relativement à la résonance paramétrique.

8.10. Les équations de mouvement sont

$$\ddot{x} + \omega^2 x - 2\alpha xy = 0,$$

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y - \alpha x^2 = 0.$$

La solution est recherchée sous la forme

$$x = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t} + \delta x,$$

$$y = Be^{2i\omega t} + B^* e^{-2i\omega t} + \delta y,$$

en posant que A et B sont des amplitudes d'oscillations qui varient

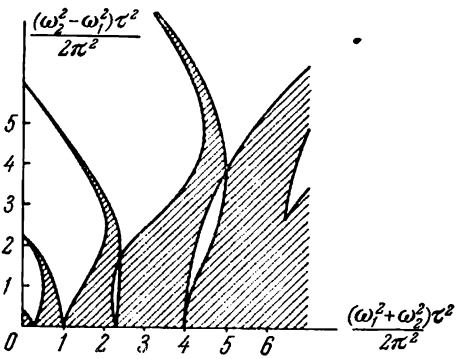


Fig. 148

lentement, les termes d'oscillations rapides δx et δy pouvant être négligés : $|\ddot{A}| \ll \omega |\dot{A}| \ll \omega^2 |A|$, $|\ddot{B}| \ll \omega |\dot{B}| \ll \omega^2 |B|$, $\delta x \sim \delta y \ll |A|$.

En ne conservant que les termes avec $e^{i\omega t}$ (et respectivement avec $e^{2i\omega t}$) et laissant tomber $|\ddot{A}|$, $|\ddot{B}|$, il vient

$$\begin{aligned} \omega\dot{A} - i\alpha BA^* &= 0, \\ 4\omega\dot{B} - i\alpha A^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Il s'ensuit aisément de (1) que

$$|A|^2 + 4|B|^2 = C = \text{const} \tag{2}$$

(c'est le principe de conservation de l'énergie) et

$$A^{*2}B + A^2B^* = D = \text{const}. \tag{3}$$

Profitant de (1), on obtient

$$\omega \frac{d}{dt} \mid A \mid^2 = i\alpha (A^{*2}B - A^2B^*). \tag{4}$$

En élevant (4) au carré, compte tenu de (2), (3), on a :

$$\left(\frac{d}{dt} \mid A \mid^2\right)^2 = -\frac{\alpha^2}{\omega^2} [(A^{*2}B + A^2B^*)^2 - 4 \mid A \mid^4 \mid B \mid^2] =$$

$$= \frac{\alpha^2}{\omega^2} [\mid A \mid^4 (C - \mid A \mid^2) - D^2]. \tag{5}$$

Il est commode d'étudier l'équation (5) constituant l'analogue du principe de conservation de l'énergie dans le problème du mouve-

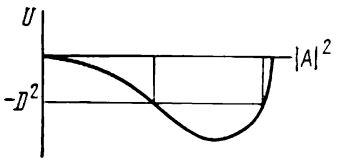


Fig. 149

ment unidimensionnel de la particule de coordonnée $\mid A \mid^2$, au moyen du graphique $U(\mid A \mid^2) = (\mid A \mid^2 - C) \mid A \mid^4$ (fig. 149).

L'amplitude $\mid A \mid$ subit donc des oscillations, c'est-à-dire des battements. La dépendance des amplitudes $\mid A \mid$ et $\mid B \mid$ du temps peut être exprimée au moyen des fonctions elliptiques (mais on s'abstiendra de le faire).

Notons qu'à la différence des oscillations d'oscillateurs à liaison linéaire (problème 6.8), dans le cas considéré, des amplitudes et des phases initiales dépend non seulement la profondeur des battements mais également la période.

Ce problème concerne, par exemple, la liaison des oscillations longitudinales et de flexion de la molécule CO_2 (résonance dit de Fermi, voir [21]) ainsi que la duplication et la démultiplication de la fréquence de la lumière en optique non linéaire (voir [22]).

8.11. $\omega^2 = \frac{a^2\gamma^2}{2l^2} \pm \frac{g}{l}$ (comp. avec [1], § 30, problème 1).

8.12. a)
$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha^2}{m\omega^2} \left[\frac{a^2}{r^6} + \frac{3\,(\mathbf{ar})^2}{r^8}\right]. \tag{1}$$

b)
$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha^2}{m\,(\omega^2 - \omega_0^2)} \left[\frac{a^2}{r^6} + \frac{3\,(\mathbf{ar})^2}{r^8}\right],$$

où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur.

Notons que la dépendance $U_{\text{eff}} \sim r^{-6}$ est typique pour les forces intermoléculaires. Si l'on porte dans (1) les valeurs des

grandeurs *) $\alpha \sim e^2 \sim (5 \cdot 10^{-10}$ unité CGSE$)^2$, $m \sim 10^{-27}$ g, $a \sim$ $\sim 10^{-8}$ cm, $\omega \sim 10^{16}$ s^{-1}, qui sont typiques pour les atomes, on obtient $U_{\text{eff}} \sim 10^{-59}$ erg$\cdot$cm$^6/r^6$, ce qui, en ordre de grandeur, se rapproche de la vraie valeur de l'interaction de Van der Waals. Ce résultat peut servir de confirmation de la nature physique de cette interaction. Quant au calcul complet des forces de Van der Waals, il n'est possible qu'en mécanique quantique.

8.13. Le mouvement suivant l'axe z est presque régulier, $z = vt$. Dans le plan (x, y) la particule est sollicitée par la force en oscillation rapide $f_x = 2Ax \sin kvt$, $f_y = 2Ay \sin kvt$. Le potentiel efficace correspondant est $U_{\text{eff}} = \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$, où $\Omega = \frac{A\sqrt{2}}{mkv}$.

Selon les données du problème, la pulsation des oscillations de la force $kv \gg \Omega$, de sorte que la force oscille en fait rapidement. Dans le plan (x, y) la particule effectue donc au voisinage de l'axe z des oscillations harmoniques de pulsation Ω. Ce problème est une illustration du principe de forte focalisation de faisceaux de particules dans les accélérateurs.

8.14. Les équations de mouvement sont

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\mathscr{H}(x)\dot{y},$$

$$m\ddot{y} = -\frac{e}{c}\mathscr{H}(x)\dot{x}.$$

Cherchons la loi du mouvement sous la forme

$$x = X + \xi, \quad y = Y + \eta, \tag{1}$$

où les termes ξ, η décrivent un mouvement rapide sur une orbite presque circulaire, tandis que X, Y est le déplacement lent de son centre (comp. avec [1], § 30).

En portant (1) dans les équations de mouvement, on développe $\mathscr{H}(X + \xi)$ en puissance de ξ:

$$\ddot{X} + \ddot{\xi} = \omega\dot{Y} + \omega\dot{\eta} + \frac{e}{mc}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x}\xi(\dot{Y} + \dot{\eta}),$$

$$\ddot{Y} + \ddot{\eta} = -\omega\dot{X} - \omega\dot{\xi} - \frac{e}{mc}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x}\xi(\dot{X} + \dot{\xi})$$

ensuite, on sépare les termes oscillant rapidement de ceux qui varient lentement. Pour les termes oscillants, on a

$$\ddot{\xi} = \omega\dot{\eta}, \quad \ddot{\eta} = -\omega\dot{\xi}, \quad \omega = \frac{e}{mc}\mathscr{H}(X),$$

---

*) Dans le système SI: $\alpha \sim \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \sim \frac{(10^{-19}\ \text{k})^2}{10^{-11}\ \text{f/m} \cdot 10}$, $m \sim 10^{-30}$ kg, $a \sim 10^{-10}$ m, $U_{\text{eff}} \sim 10^{-18}\left(\frac{a}{r}\right)^6$ J.

d'où

$$\xi = r\cos\omega t, \quad \eta = -r\sin\omega t.$$

Pour les termes variant lentement, on a

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \omega\dot{Y} + \frac{e}{mc}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x}\langle\xi\dot{\eta}\rangle, \\ \ddot{Y} &= -\omega\dot{X} - \frac{e}{mc}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x}\langle\xi\dot{\xi}\rangle, \end{aligned} \tag{2}$$

où

$$\langle\xi\dot{\eta}\rangle = -r^2\omega\langle\cos^2\omega t\rangle = \frac{r^2\omega}{2}, \quad \langle\xi\dot{\xi}\rangle = 0.$$

Comme $\ddot{X}$, $\ddot{Y} \sim \varepsilon\omega\dot{X}$, $\varepsilon\omega\dot{Y}$, les premiers membres de (2) peuvent être considérés comme nuls.

Bref,

$$\dot{Y} = \frac{er^2}{2mc}\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x} = \frac{1}{2}\varepsilon v, \quad \dot{X} = 0.$$

(La vitesse de déplacement du centre de l'orbite (vitesse de dérive) dans un cas plus général a été étudiée dans [2], problème 3 du § 22 et dans [8], § 25.)

8.15. L'équation de mouvement de la bille est

$$m\ddot{y} = -\frac{dU(y)}{dy} + f(t).$$

Le mouvement propre de la bille sous l'action du ressort est décrit par l'écartement de « basse fréquence » $x = y - y_0\cos\gamma t$, pour lequel

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x + y_0\cos\gamma t)}{dx}.$$

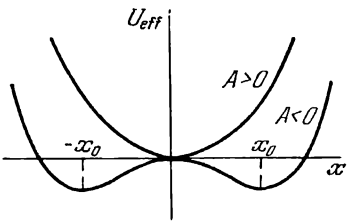


Fig. 150

En prenant la moyenne sur la période $2\pi/\gamma$ du mouvement de haute fréquence

$$\left(\langle\cos^{2n+1}\gamma t\rangle = 0,\ \langle\cos^2\gamma t\rangle = \frac{1}{2},\ \langle\cos^4\gamma t\rangle = \frac{3}{8}\right),$$

on obtient la force efficace et l'énergie efficace correspondante

$$U_{\text{eff}}(x) = Ax^2 + Bx^4, \quad A = -C + \frac{9}{4}By_0^2.$$

Le graphique de la fonction $U_{\text{eff}}(x)$ est représenté sur la figure 150.

Pour $A > 0$ ou $T = y_0^2 > T_{\text{p}} = 4C/9B$ la bille oscille près du point $x = 0$ avec la pulsation $\omega = \sqrt{2A/m} \sim \sqrt{T - T_{\text{p}}}$. Pour $A < 0$ ou $T < T_{\text{p}}$ les minimums de $U_{\text{eff}}(x)$ se disposent aux points

$\pm x_0 = \pm \sqrt{-A/2B}$, la bille oscillant près de l'un d'eux avec la pulsation $\omega = \sqrt{-A/m} \backsim \sqrt{T_p - T}$.

L'image donnée est très proche de celle des transitions de phases de second ordre décrites par la théorie phénoménologique de Landau [23]. Les rapides oscillations entretenues présentent des analogies avec les agitations thermiques (correspondant aux modes optiques d'oscillations du système non liés à la transition), tandis que la quantité $T = y_0^2$ est l'analogue de la température. Pour des T grands, le système oscille autour de la position d'équilibre $x = 0$. En outre il y a symétrie relativement à la substitution $x \to -x$. Avec l'abaissement de la température jusqu'à la valeur $T < T_p$ la bille commence à osciller autour de l'une des nouvelles positions d'équilibre : x_0 ou $-x_0$. Dans ce cas la symétrie $x \to -x$ est, sûrement, détruite. La valeur T_p est l'analogue de la température de transition de phase de second ordre. Au voisinage du point $T = T_p$ la grandeur x_0 est petite, $x_0 \backsim \sqrt{T_p - T}$, la pulsation ω des oscillations propres étant également petite.

§ 9. Mouvement du solide. Référentiels non galiléens

9.1. a) $\begin{pmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 4a^2m & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2M & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}$.

9.2. Pour les deux figures, un des axes principaux est l'axe perpendiculaire au plan du dessin et passant par le centre d'inertie de la figure (axe z). Dans les deux figures, l'axe principal x est tourné du côté de $O'x'$ de l'angle φ. L'axe principal y est perpendiculaire à l'axe x. Ces deux axes passent par le centre de gravité des figures.

a) Les coordonnées du centre des axes $O'x'y'$ ($x' = b$, $y' = a$) sont

$$I_{zz} = 2(a^2 + b^2)(M + m),$$

$$I_{xx} = (a^2 + b^2)(M + m) \mp \sqrt{(b^2 - a^2)^2 (M + m)^2 + 4a^2b^2 (M - m)^2},$$

$$I_{yy} = (a^2 + b^2)(M + m) \pm \sqrt{(b^2 - a^2)^2 (M + m)^2 + 4a^2b^2 (M - m)^2},$$

$$\text{pour } a \gtrless b, \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2ab(M - m)}{(a^2 - b^2)(M + m)}.$$

b) Par rapport aux axes $O'x'y'z'$ (fig. 151) les coordonnées du centre des masses O sont : $x' = y' = a$, $z' = 0$. Dans le système de

coordonnées $Ox''y''z''$ dont les axes sont parallèles aux axes x', y', z' le tenseur d'inertie est

$$I''_{ik} = 4ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Avec le passage au système $Oxyz$, ayant subi une rotation d'angle φ autour de z'', les coordonnées se transforment de la façon suivante :

$$x = x'' \cos\varphi + y'' \sin\varphi, \quad y = -x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi,$$
$$z = z''.$$

Quant aux composantes du tenseur d'inertie (produits des coordonnées), elles sont :

$$I_{xx} = I''_{xx} \cos^2\varphi + 2I''_{xy} \sin\varphi \cos\varphi + I''_{yy} \sin^2\varphi =$$
$$= 4ma^2 (3\cos^2\varphi + \sin 2\varphi + \sin^2\varphi),$$
$$I_{yy} = 4ma^2 (3\cos^2\varphi - \sin 2\varphi + \sin^2\varphi),$$
$$I_{zz} = 16ma^2,$$
$$I_{xy} = 4ma^2 (-\sin 2\varphi + \cos 2\varphi),$$
$$I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

L'angle φ est choisi de façon à satisfaire la condition $I_{xy} = 0$, par exemple $\varphi = \pi/8$. Dans ce cas

$$I_{xx} = 4ma^2 (2 + \sqrt{2}), \quad I_{yy} = 4ma^2 (2 - \sqrt{2}).$$

9.3. $I_{\mathrm{n}} = \sum\limits_{i,k} I_{ik} n_i n_k$.

9.4. Le centre des masses est le point se trouvant sur l'axe de symétrie à la distance $\frac{(R-r)r^3}{R^3-r^3}$ du centre de la sphère vers la gauche. Le corps est une toupie symétrique. Par rapport à l'axe de symétrie $I_3 = \frac{m}{R^3-r^3}\frac{2}{5}(R^5-r^5)$; par rapport aux axes perpendiculaires passant par le centre des masses

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{R^3-r^3}\left[\frac{2}{5}(R^5-r^5) - \frac{(R-r)^2 r^3 R^3}{(R^3-r^3)}\right].$$

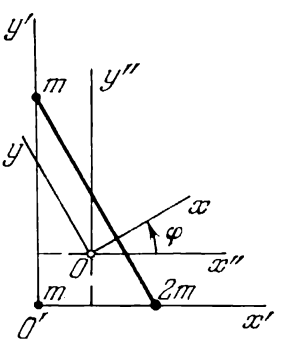


Fig. 151

9.5. $D_{ik} = \left(\sum\limits_n I_{nn}\right)\delta_{ik} - 3I_{ik}$ (voir [2], § 99).

9.6. Le centre des masses se situe sur l'axe de la demi-sphère à la distance $\frac{3}{8}R$ du centre de la sphère (R étant le rayon de la sphère). Le moment d'inertie par rapport à

l'un quelconque des axes perpendiculaires à l'axe de symétrie (m — la masse de la demi-sphère) est

$$I=\frac{2}{5}mR^2-m\left(\frac{3}{8}R\right)^2=\frac{83}{320}mR^2.$$

Au cours des oscillations le centre des masses ne peut se mouvoir que suivant la verticale. Soit φ l'angle de rotation de la demi-sphère, z la hauteur du centre des masses au-dessus du plan $z=R-\frac{3}{8}R\cos\varphi$. La fonction de Lagrange du système est $L=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\dot{z}^2-mgz$, ou, pour des φ petits $L=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2-\frac{1}{16}mgR\varphi^2$. D'où on tire la pulsation des petites oscillations

$$\omega=\sqrt{\frac{120}{83}\cdot\frac{g}{R}}.$$

9.7. Vraisemblablement la vitesse $\mathbf{v}$ de la bille après le choc ne peut être dirigée que suivant ou en sens opposé de $\mathbf{V}$, autrement dit, $\mathbf{v}=v\mathbf{V}/V$. La vitesse $\mathbf{u}$ de l'haltère après le choc est dirigée suivant $\mathbf{V}$, sa vitesse angulaire étant $\boldsymbol{\omega}$.

Les lois de conservation de l'impulsion, de l'énergie et du moment cinétique (par rapport au centre de l'haltère) sont :

$$mV=mv+2mu,$$

$$\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}mv^2+mu^2+\frac{1}{2}I\omega^2,$$

$$mVr=mvr+I\omega,$$

où m est la masse de la bille, r, son rayon, $I=\frac{14}{5}mr^2$ le moment d'inertie de l'haltère.

D'où on tire

$$\mathbf{v}=-\frac{1}{13}\mathbf{V},\quad \mathbf{u}=\frac{7}{13}\mathbf{V},\quad \boldsymbol{\omega}=\frac{5}{13}\frac{V}{r}.$$

9.8. Actuellement les distances du centre d'inertie du système Terre — Lune à la Terre et à la Lune valent respectivement $\frac{m}{M+m}R$ et $\frac{M}{M+m}R$, tandis que le moment cinétique du système est

$$m\left(\frac{MR}{M+m}\right)^2\Omega_L+M\left(\frac{mR}{M+m}\right)^2\Omega_L+I\Omega_T=\mathcal{J}\Omega_L+I\Omega_T,$$

$$\mathcal{J}=\frac{Mm}{M+m}R^2, \tag{1}$$

où Ω_L et Ω_T sont les vitesses angulaires de rotation de la Lune autour de la Terre et de la Terre autour de son propre axe ($\Omega_T/\Omega_L\approx 28$). En écrivant (1), on a assimilé la Lune à un point matériel, tandis que

pour la Terre on a tenu compte de la rotation autour du centre d'inertie et sur de son propre axe (avec le moment d'inertie $I = \frac{2}{5} Ma^2$).

A l'instant où le jour s'égalisera avec le mois la vitesse angulaire de rotation de la Terre ω deviendra égale à la vitesse angulaire de la Lune, la distance de la Terre à la Lune devenant (suivant la troisième loi de Kepler) égale à $R\,(\Omega_L/\omega)^{2/3}$, tandis que le moment cinétique sera :

$$\left[\mathcal{J}\left(\frac{\Omega_L}{\omega}\right)^{4/3} + I\right]\omega. \tag{2}$$

De (1) et (2) on tire l'équation pour $x = \frac{\omega}{\Omega_T}$:

$$x\,(1 + k - x)^3 = k^3 \frac{\Omega_L}{\Omega_T}, \tag{3}$$

où $k = \frac{\mathcal{J}\Omega_L}{I\Omega_T} = \frac{5}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{m}{M+m}\,\frac{\Omega_L}{\Omega_T} \approx 3{,}8.$

L'équation (3), ou $x\,(4{,}8 - x)^3 = 2{,}01$, possède deux racines réelles : $x_1 \approx 1/55$ et $x_2 \approx 4$. La première correspond à l'avenir, la seconde au passé. Respectivement, dans le premier cas le mois deviendra égal à 55 jours actuels, dans le second cas il était égal à 6 heures. La distance de la Terre à la Lune deviendra égale à $1{,}6\,R$ et a été égale à $2{,}6a$.

(Pour des modèles d'évolution du système Terre-Lune plus proches de la réalité que celui qu'on vient d'étudier voir, par exemple, [24], ch. 2.)

9.9. a) Le corps tourne à la vitesse angulaire $\frac{2}{7}\,\omega$; $\frac{5}{7}$ de l'énergie cinétique initiale s'est transformé en chaleur.

b) La ligne des centres est mise en rotation avec la vitesse angulaire $\frac{\sqrt{2}}{7}\,\omega$ autour de la direction du moment M qui fait avec elle un angle de 45° ; dans ce cas le corps tourne autour de la ligne des centres à la vitesse angulaire $\frac{5}{14}\,\omega$. $\frac{19}{28}$ de l'énergie cinétique initiale s'est transformé en chaleur.

9.10. $$f_{1,2} = m\left(g \pm \frac{v^2}{14r}\right).$$

9.11. Le moment d'inertie de l'ellipsoïde (voir [1], § 32, problème 2e) par rapport à l'axe de rotation est $I_3 = \frac{2M}{5}\,a^2$; par rapport à un axe quelconque qui lui est perpendiculaire et qui passe par le centre des masses $I_1 = \frac{M(a^2+c^2)}{5}$ (M étant la masse de l'ellipsoïde).

La particule incidente de masse $m \ll M$ communique à l'ellipsoïde l'impulsion $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = mv\,(0, -1, 0)$ et l'énergie cinétique $\mathbf{M} = mv\,(\rho_1, 0, -\rho_2)$.

On trouve que dans le système se mouvant à la vitesse $\frac{\mathbf{p}}{M+m}$ (voir [1], § 33) l'ellipsoïde est mis en rotation autour du demi-axe c à la vitesse angulaire $\Omega_3 = \frac{M_z}{I_3} = -\frac{5\,mv\,\rho_2}{2\,Ma^2}$ tout en subissant une précession autour de la direction de $\mathbf{M}$ de vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{|\mathbf{M}|}{I_1} = \frac{5mv\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}}{M\,(a^2+c^2)}.$$

9.12. Désignons la vitesse angulaire du volant autour de son propre axe par $\dot{\psi}$ et l'angle formé par cet axe et la direction vers le Nord par φ. Dans le système galiléen la vitesse du volant est $\omega = \Omega + \dot{\varphi} + \dot{\psi}$, ses projections sur l'axe du volant $\omega_3 = \dot{\psi} + \Omega \cos\alpha \cos\varphi$, sur la verticale $\omega_1 = \dot{\varphi} + \Omega \sin\alpha$, sur l'axe horizontal perpendiculaire à l'axe du volant $\omega_2 = \Omega \cos\alpha \sin\varphi$.

La fonction de Lagrange est égale à l'énergie cinétique (compte tenu de ce que $I_1 = I_2$):

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi} + \Omega \sin\alpha)^2 + \frac{1}{2} I_1 \Omega^2 \cos^2\alpha \sin^2\varphi + \\ + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \Omega \cos\alpha \cos\varphi)^2.$$

Il est commode d'étudier le mouvement en recourant aux intégrales de mouvement p_ψ et $E = p_\psi \dot{\psi} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$:

$$p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \Omega \cos\alpha \cos\varphi),$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 - \Omega^2 \sin^2\alpha) - \frac{1}{2} I_1 \Omega^2 \cos^2\alpha \sin^2\varphi + \\ + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi}^2 - \Omega^2 \cos^2\alpha \cos^2\varphi).$$

En éliminant $\dot{\psi}$, il vient

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + U_{\text{eff}}(\varphi) + \text{const},$$

où

$$U_{\text{eff}}(\varphi) = -p_\psi \Omega \cos\alpha \cos\varphi + \frac{1}{2} I_1 \Omega^2 \cos^2\alpha \cos^2\varphi.$$

Bornons-nous au cas de $\dot{\psi} \gg \Omega$. Alors $p_\psi \approx I_3 \dot{\psi}$,

$$U_{\text{eff}}(\varphi) \approx -p_\psi\, \Omega \cos\alpha \cos\varphi.$$

La fonction $U_{\text{eff}}(\varphi)$ a un minimum pour $\varphi = 0$ (c'est-à-dire en direction vers le Nord). L'axe du gyrocompas oscille autour de cette direction. Pour de petites oscillations

$$U_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi} \Omega \cos\alpha \cdot \varphi^2 + \text{const},$$

quant à la fréquence d'oscillations de l'axe elle est égale à $\sqrt{\frac{I_3}{I_1} \Omega \dot{\psi} \cos\alpha}$. Par exemple, pour un gyroscope effectuant environ 10 mille tours par minute la période d'oscillations est d'environ d'une demi-minute $\left(\text{pour } \frac{I_3}{I_1} \cos\alpha \sim 1\right)$.

De quelle manière peut-on se rendre compte du moment d'inertie imputable au cadre?

9.13. Il est commode d'utiliser un système de coordonnées mobile dont l'axe x passe par le point de contact du disque avec la table. Dans ce système

$$\frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \mathbf{M}] = \mathbf{K}, \tag{1}$$

où $\mathbf{M}$ est le moment cinétique de la toupie par rapport au point immobile O, $\mathbf{K}$ le moment des forces agissant sur lui (comp. avec [1], § 36). La projection de (1) sur l'axe x est

$$\dot{M}_x - \dot{\varphi} M_y = K_x.$$

Evidemment $M_y = 0$, $K_x = 0$, de sorte que $M_x = \text{const}$.

Supposons que $I_1 = I_2 \neq I_3$ sont les moments d'inertie principaux de la toupie par rapport au point O. A l'instant origine

$$M = \Omega I_3, \quad M_x = \Omega I_3 \cos\theta.$$

Quand le patinage cesse, l'axe x devient un axe instantané de rotation, autrement dit la vitesse angulaire ω de la toupie est dirigée le long de l'axe x, tandis que $M_x = I_3 \omega \cos^2\theta + I_1 \omega \sin^2\theta$. Donc

$$\omega = \frac{\Omega I_3 \cos\theta}{I_3 \cos^2\theta + I_1 \sin^2\theta}.$$

Remarquons qu'après la cessation du patinage $\dot{\varphi} = -\omega \operatorname{tg}\theta$.

9.14. Soient $a = b \neq c$ les demi-axes de l'ellipsoïde, R, Θ, Φ les coordonnées sphériques du centre d'inertie de l'ellipsoïde, θ, φ, ψ les angles d'Euler, l'axe x_3 du système de coordonnées mobile étant dirigé suivant le demi-axe c. L'énergie cinétique du corps (voir [1], § 35) est

$$T = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Phi}^2 \sin^2\Theta) + \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \\ + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2, \tag{1}$$

où $I_1 = I_2 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ et $I_3 = \frac{2m}{5}a^2$ sont les moments d'inertie de l'ellipsoïde par rapport aux axes x_1, x_2, x_3.

L'énergie potentielle conseillée de l'interaction de l'ellipsoïde avec le centre coulombien peut être récrite sous la forme

$$U = -\frac{\gamma m M}{R} - \frac{\gamma M D}{4} \cdot \frac{3\cos^2\alpha - 1}{R^3}, \tag{2}$$

où $D = 2(I_1 - I_3)$, quant à α c'est l'angle formé par le rayon vecteur $\mathbf{R}$ et l'axe x_3.

Le vecteur unité $\mathbf{e}_{x3}$ fixant la direction de l'axe présente des composantes $\mathbf{e}_{x3} = (\sin\theta\sin\varphi, -\sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$. D'où

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{R}\mathbf{e}_{x_3}}{R} = \cos\theta\cos\Theta + \sin\theta\sin\Theta\sin(\varphi - \Phi). \tag{3}$$

A partir de (1), (2) et (3) on tire l'expression définitive de la fonction de Lagrange $L = T - U$.

9.15. Commençons par étudier l'influence du seul Soleil. L'origine du système de coordonnées se confondra avec le Soleil, quant à l'axe X_3 (voir les notations au problème précédent) il sera dirigé perpendiculairement au plan de l'orbite de la Terre, et l'axe x_3 vers le Nord.

Il faut s'attendre à ce que la vitesse angulaire de la précession $\dot{\varphi}$ de l'axe terrestre soit petite devant celles des rotations diurne $\dot{\psi}$ et annuelle $\dot{\Phi}$ de la Terre. On ne conservera donc dans la fonction de Lagrange que les termes du premier ordre en $\dot{\varphi}$. De plus, supposons que les grandeurs R, $\Theta = \pi/2$ et $\dot{\Phi}$ sont constantes avec

$$\frac{2\pi}{\dot{\Phi}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 1 \text{ an}, \tag{1}$$

et, en prenant la moyenne de $\cos^2\alpha$ sur un an, on a : $\langle\cos^2\alpha\rangle = \frac{1}{2}\sin^2\theta$. Après quoi, il vient

$$L = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta) - \frac{3\gamma M m(a^2 - c^2)}{20R^3}\sin^2\theta.$$

La persistance de $p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$ et de $p_\varphi = I_3\dot{\psi}\cos\theta$ implique celles de $\dot{\psi}$ et $\theta = 23°$ (à la précision jusqu'aux grandeurs de l'ordre de $\dot{\varphi}$ près). L'équation de mouvement en fonction de l'angle θ prend la forme

$$I_1\ddot{\theta} + I_3\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta + \frac{3\gamma M m(a^2 - c^2)}{10R^3}\sin\theta\cos\theta = 0$$

et compte tenu de ce que $\ddot{\theta} \sim \dot{\theta}^2 \sim \dot{\varphi}^2$ on a :

$$\dot{\varphi} = -\frac{3\gamma M}{4R^3\dot{\psi}} \frac{a^2-c^2}{a^2} \cos\theta. \tag{2}$$

En y reportant la relation (1) et $\frac{a^2-c^2}{a^2} \approx \frac{2(a-c)}{a}$, il vient

$$\dot{\varphi} \approx -\frac{3}{2} \frac{a-c}{a} \frac{\dot{\Phi}^2}{\dot{\psi}} \cos\theta \approx -16'' \text{ par an.}$$

La vitesse de la précession due à la Lune s'obtient à partir de (2) en remplaçant la masse M du Soleil par celle de la Lune et R par la distance de la Terre à la Lune ; en définitive, elle est de 31″ par an. La vitesse totale $\dot{\varphi} = -48''$ par an. La grandeur observée de $\dot{\varphi}_{\text{expan}} = -50{,}2''$ par an (voir [24], ch. 2).

Ainsi donc l'axe terrestre évolue autour de l'axe X_3 avec une période d'environ 26 mille ans dans le sens opposé à la rotation de la Terre autour du Soleil (dite précession des équinoxes).

9.16.

$$\dot{M}_1 + \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3}\right) M_2 M_3 = K_1,$$

$$\dot{M}_2 + \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) M_3 M_1 = K_2,$$

$$\dot{M}_3 + \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right) M_1 M_2 = K_3;$$

pour $I_1 = I_2$

$M_1 = B\cos(\omega t + \varphi)$, $M_2 = B\sin(\omega t + \varphi)$, $M_3 = \text{const}$, $\omega = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) M_3$ (voir [1], § 36, et comp. avec problème 10.20).

9.17. Etudions le mouvement autour d'un axe proche de l'axe d'inertie x_1. A partir des équations d'Euler (voir [1], formule (36.5))

$$\dot{\Omega}_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 = 0$$

on obtient $\Omega_1 = \text{const}$ avec la précision jusqu'aux termes proportionnels à $\Omega_{2,3}/\Omega_1 \ll 1$ près. Deux autres équations deviennent à ces conditions linéaires par rapport à Ω_2 et Ω_3. En posant

$$\Omega_{2,3} \sim e^{st}, \tag{1}$$

on obtient pour s l'équation

$$s^2 = \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} \Omega_1^2. \tag{2}$$

Pour $I_2 < I_1 < I_3$ ou $I_3 < I_1 < I_2$ l'équation (2) présente des racines réelles, ce qui correspond, selon (1), à l'instabilité de la rotation autour de l'axe x_1.

Si, par contre, le moment d'inertie I_1 est maximal ou minimal, l'équation (2) possède des racines imaginaires, c'est-à-dire que Ω_2 et Ω_3 varient en oscillant et la rotation autour de l'axe x_1 est de nature stable.

9.18. Le mouvement de la sphère est défini par les équations

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} + \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\mathbf{af}], \tag{2}$$

$$\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}] = 0, \tag{3}$$

où m est la masse de la sphère, $I = \frac{2}{5} ma^2$ son moment d'inertie; $\mathbf{a}$ le rayon de la sphère dirigé vers le point de son contact avec le cylindre, $\mathbf{f}$ la force appliquée à la sphère en ce point (somme de la réaction et du frottement), $\mathbf{v}$ la vitesse et $\boldsymbol{\omega}$ la vitesse angulaire de la sphère.

Il sied dans ce cas d'utiliser les coordonnées cylindriques d'axe z confondu avec l'axe du cylindre. Mais il faut alors tenir compte du fait que la projection de la vitesse de variation d'un vecteur quelconque $\mathbf{A}$ sur les axes mobiles se détermine d'après les formules

$$(\dot{\mathbf{A}})_\varphi = \dot{A}_\varphi + [\dot{\varphi}\mathbf{A}]_\varphi = \dot{A}_\varphi + \dot{\varphi}A_r;$$

$$(\dot{\mathbf{A}})_r = \dot{A}_r + [\dot{\varphi}\mathbf{A}]_r = \dot{A}_r - \dot{\varphi}A_\varphi \tag{4}$$

($r = b - a$, φ, z sont les coordonnées du centre de la sphère, $\dot{\varphi} = v_\varphi/r$). Des équations

$$m\dot{v}_\varphi = f_\varphi, \quad I\dot{\omega}_z = af_\varphi, \quad v_\varphi + a\omega_z = 0$$

on obtient

$$v_\varphi = \text{const}, \quad \omega_z = \text{const}, \quad f_\varphi = 0.$$

Des équations

$$m\dot{v}_z = -mg + f_z, \quad v_z - a\omega_\varphi = 0,$$

$$I(\dot{\omega}_\varphi + \dot{\varphi}\omega_r) = -af_z, \quad I(\dot{\omega}_r - \dot{\varphi}\omega_\varphi) = 0$$

il s'ensuit que

$$(I + ma^2)\ddot{\omega}_\varphi + I\dot{\varphi}^2\omega_\varphi = 0,$$

soit

$$\omega_\varphi = C\cos(\Omega t + \alpha), \quad \Omega = \sqrt{\frac{I}{I + ma^2}}\,\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{7}}\,\frac{v_\varphi}{r},$$

$$\omega_r = -\frac{5gr}{2av_\varphi} + \sqrt{\frac{7}{2}}\,C\sin(\Omega t + \alpha),$$

$$z = z_0 - a\,\frac{C}{\Omega}\sin(\Omega t + \alpha).$$

Donc la sphère effectue des oscillations harmoniques en hauteur et, en mesure avec ces oscillations, varie la composante radiale de la vitesse angulaire.

9.19. a) En guise de coordonnées généralisées choisissons les coordonnées X, Y du centre et les angles d'Euler φ, θ, ψ ([1], § 35). L'axe Z est vertical, l'axe mobile x_3 suit l'axe du disque. La ligne marquant l'intersection du plan du disque avec le plan XY (ligne des nœuds*) forme l'angle φ avec l'axe X. La fonction de Lagrange est

$$L=\frac{m}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+a^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta)+\frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+$$
$$+\frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2-mga\sin\theta,$$

où $I_1=I_2$ et I_3 sont les moments d'inertie du disque par rapport aux axes x_1, x_2, x_3, a le rayon, m la masse du disque (la hauteur du centre du disque au-dessus du plan $Z=a\sin\theta$).

Les intégrales de mouvement s'expriment par les impulsions généralisées

$$m\dot{X}=p_X,\quad m\dot{Y}=p_Y,$$
$$I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta+I_3\cos\theta(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=p_\varphi\equiv M_Z, \tag{1}$$
$$I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})=p_\psi\equiv M_3$$

et l'énergie. Dans le système de coordonnées se mouvant à une vitesse constante $(\dot{X}, \dot{Y}, 0)$, le centre du disque ne se déplace que dans la direction verticale. De (1) l'on tire

$$\dot{\varphi}=\frac{M_Z-M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta},\quad \dot{\psi}=\frac{M_3}{I_3}-\frac{M_Z-M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta, \tag{2}$$

et, en portant dans l'intégrale de l'énergie, il vient

$$E=\frac{1}{2}(I_1+ma^2\cos^2\theta)\dot{\theta}^2+\frac{M_3^2}{2I_3}+\frac{(M_Z-M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+mga\sin\theta. \tag{3}$$

De là, au moyen de quadratures, on détermine la fonction $\theta(t)$, ensuite, à l'aide de (2), celles de $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

L'angle d'inclinaison du disque oscille et, en mesure avec ces oscillations, varient les vitesses de la précession $\dot{\varphi}$ et de la rotation autour de l'axe $\dot{\psi}$. Les équations (2), (3) rappellent les équations de mouvement d'une lourde toupie symétrique (voir, par exemple, les équations (4)-(7) de [1], § 35, problème 1).

Le roulement du disque est stable pour $\Omega_3^2>mga\,I_1/I_3^2$, la rotation pour $\Omega_Z^2>mga/I_1$.

b) En l'absence de patinage, sur le disque agit, outre les forces de pesanteur $m\mathbf{g}$ et de réaction d'appui $\mathbf{R}$, la force de frottement $\mathbf{f}$.

Il est commode de transcrire l'équation

$$\dot{\mathbf{M}} - [\mathbf{aR}] = [\mathbf{af}]$$

en projections sur les axes Z, x_3 et ξ (l'axe ξ est la ligne des nœuds) *) :

$$\dot{M}_Z = f_\eta a \cos\theta, \quad \dot{M}_3 = f_\xi a, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = f_\xi a \sin\theta. \tag{5}$$

a est ici le vecteur mené du centre du disque au point de son contact avec le plan.

Ecrivons l'équation

$$m\mathbf{V} = \mathbf{f} + \mathbf{R} + m\mathbf{g}$$

en projections sur les axes ξ et η, où l'axe η est horizontal et perpendiculaire à l'axe ξ (voir formule (4) du problème précédent)

$$\begin{aligned} f_\xi &= m(\dot{\mathbf{V}})_\xi = m(\dot{V}_\xi + \dot{\varphi} V_\eta), \\ f_\eta &= m(\dot{\mathbf{V}})_\eta = m(\dot{V}_\eta - \dot{\varphi} V_\xi). \end{aligned} \tag{6}$$

La condition de roulement sans patinage $\mathbf{V} + [\mathbf{\Omega a}] = 0$ implique les égalités

$$V_\xi = -a(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta), \quad V_\eta = a\dot{\theta}. \tag{7}$$

En reportant (1), (6), (7) dans (4), (5), on obtient un système d'équations en fonction des angles d'Euler. Le mouvement de roulement sans patinage et sans perte de contact avec le plan est possible si

$$|f| \leqslant \mu m(g + \ddot{Z}), \quad g + \ddot{Z} \geqslant 0$$

(μ est le coefficient de frottement).

En posant $\dot{\theta} = 0$, on obtient $\ddot{\varphi} = \ddot{\psi} = 0$, de plus θ, $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ sont liés par la relation

$$I'_3\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\sin\theta - I_1\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + mga\cos\theta = 0 \tag{8}$$

(ici et plus loin $I'_{1,3} = I_{1,3} + ma^2$). Le centre du disque, en se mouvant à une vitesse constante $V = a\,|\Omega_3| = a\,|\dot{\psi} + \dot{\psi}\cos\theta|$, décrit un cercle de rayon $R = V/|\dot{\varphi}|$. Les conditions (8) peuvent prendre également la forme

$$I'_3 R V^2 = |I_1 a V^2 \cos\theta + mga^2 R^2 \operatorname{cotg}\theta|.$$

*) En l'absence de frottement, ces équations constituent des équations de Lagrange pour les angles d'Euler.

En particulier, si la masse du disque est concentrée en son centre ($I_1 = I_3 = 0$), on obtient alors la relation élémentaire: $V^2 = gR \mid \operatorname{cotg} \theta \mid$. Les effets gyroscopiques se manifestant pour des $I_{1,3}$ différents de zéro peuvent être assez sensibles. Par exemple, pour un disque homogène ($2I_1 = I_3 = \frac{1}{2}ma^2$) au cas où $R \gg a$, on obtient $\frac{3}{2} V^2 = gR \mid \operatorname{cotg} \theta \mid$; pour un cercle ($2I_1 = I_3 = ma^2$) dans un cas identique $2V^2 = gR \mid \operatorname{cotg} \theta \mid$.

Au cas de roulement du disque en position verticale

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = \Omega_3 = \text{const}. \tag{9}$$

A des fins d'étude de la stabilité de ce mouvement, portons dans les équations (1), (4)-(7)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta, \qquad \beta \ll 1, \qquad \dot{\varphi} \sim \dot{\beta} \sim \beta\Omega_3 \ll \Omega_3, \quad \ddot{\varphi} \sim \ddot{\beta} \sim \dot{\Omega}_3 \ll \dot{\varphi}\Omega_3$$

et ne conservons que les termes du premier degré de petitesse. Il vient

$$M_z = I_1\dot{\varphi} + I_3\Omega_3\beta = \text{const}, \quad \Omega_3 = \text{const},$$

$$I_1'\ddot{\beta} + I_3'\Omega_3\dot{\varphi} - mga\beta = 0, \tag{10}$$

d'où

$$I_1'\ddot{\beta} + \left(\frac{I_3 I_3'}{I_1}\Omega_3^2 - mga\right)\beta = \frac{I_3'}{I_1} M_z\Omega_3.$$

Si

$$\Omega_3^2 > \frac{I_1 mga}{I_3 I_3'}, \tag{11}$$

alors avec un écartement de l'angle θ de $\pi/2$ des petites oscillations β et $\dot{\varphi}$ sont amorcées:

$$\beta = \frac{I_3'\Omega_3 M_z}{I_1\omega^2} + \beta_0 \cos(\omega t + \delta),$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{mgaM_z}{I_1^2\omega^2} - \frac{I_3\Omega_3\beta_0}{I_1} \sin(\omega t + \delta),$$

où $\omega^2 = \frac{I_3 I_3'}{I_1 I_1'}\Omega_3^2 - \frac{Mga}{I_1'}$.

La direction du mouvement subi par le disque est également soumise à des petites oscillations, le disque se mouvant non pas sur une droite mais sur un cercle de rayon $a\,\Omega_3 I_1^2\omega^2/mgaM_z$.

Donc un petit écartement des conditions initiales de (9) peut impliquer soit des petites oscillations au voisinage du mouvement « équilibré » sur une droite (si $M_z = 0$, $\beta_0 \neq 0$), soit un nouveau mouvement « équilibré » (si $M_z \neq 0$, $\beta_0 = 0$).

Si l'inégalité (11) n'est pas satisfaite, le mouvement devient instable.

On peut dire que le mouvement s'effectue avec $\theta = \text{const}$, si dans l'« espace » θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ le point est situé sur la surface définie par l'équation (8). Il est aisé de se convaincre qu'à la condition (11) le mouvement est stable relativement aux perturbations sortant le point (θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$) de la surface (8) et indifférent relativement aux déplacements sur cette surface. La situation est analogue en ce qui concerne la stabilité du mouvement du disque sur une surface lisse (il faut seulement remplacer $I'_{1,3}$ par $I_{1,3}$).

Le pivotement du disque autour du diamètre vertical est stable au cas où $\Omega_Z^2 > mga/I'_1$.

c) En l'absence de rotation autour de l'axe vertical (pivotement) on a la condition

$$\Omega_Z = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = 0. \tag{12}$$

Dans ce cas le disque est soumis à un « moment de frottement dû au pivotement » N dirigé verticalement, et au lieu de (4) on obtient

$$\dot{M}_Z = f_\xi a \cos\theta + N, \quad \dot{M}_3 = f_\xi a + N\cos\theta. \tag{13}$$

L'intégration des équations de mouvement se réduit assez facilement à des quadratures (à la différence des équations du point b)).

Le mouvement avec une inclinaison constante est possible si, outre la condition (8), on remplit la condition (12), c'est-à-dire si $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$ sont définis par l'angle θ. Dans ce cas

$$R = a\,|\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,|. \quad V^2 = \frac{mga^3\sin\theta}{I'_3 - I_1\,\mathrm{cotg}^2\,\theta}.$$

Le pivotement du disque en position verticale est possible pour $\Omega_3^2 > mga/I'_3$.

d) Avec une petite inclinaison du plan il est nécessaire d'ajouter à la fonction de Lagrange le terme $\delta L = -mg\alpha X$ (l'axe X étant dirigé vers le haut le long du plan, l'axe Y demeurant horizontal et l'axe Z perpendiculaire au plan). En tenant compte de (4)-(7) dans (1)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta, \ \beta \ll 1, \ \dot{\psi} \sim \dot{\beta} \ll \Omega_Z, \quad \ddot{\psi} \sim \ddot{\beta} \sim \dot{\Omega}_Z \ll \dot{\psi}\Omega_Z$$

et en y adjoignant l'apport δL ; il vient

$$I'_1\ddot{\beta} + (I_1 - I'_3)\,\Omega_Z^2\beta - I'_3\Omega_Z\dot{\psi} - mga\beta = mga\,\alpha\sin\Omega_Z t,$$

d'où

$$\psi = -\left(2 + \frac{2ma^2}{I'_3} + \frac{mga}{I'_3\Omega_Z^2}\right)\alpha\cos\Omega_Z t, \quad \beta = -2\alpha\sin\Omega_Z t.$$

En reportant (7) et θ, $\varphi = \Omega_Z\, t$, ψ dans

$$\dot{X} = V_\xi \cos\varphi - V_\eta \sin\varphi, \quad \dot{Y} = V_\xi \sin\varphi + V_\eta \cos\varphi$$

et en faisant la moyenne sur la période de rotation, il vient

$$\langle \dot{X} \rangle = 0, \quad \langle \dot{Y} \rangle = -\left(1 + \frac{ma^2}{I_3'} + \frac{mga}{2I_3'\Omega_Z^2}\right) \alpha a \Omega_Z,$$

c'est-à-dire que le disque se déplace sans perdre en hauteur.

9.20. a) La position de la sphère se détermine au moyen des coordonnées de son centre des masses X, Y, Z et des angles d'Euler θ, φ, ψ (voir [1], § 35) qui définissent les positions des axes d'inertie principaux. L'axe Z est dirigé vers le haut, l'axe x_3 du centre des masses vers le centre géométrique de la sphère pour laquelle $x_3 = b$, le rayon de la sphère étant a. L'étude du mouvement de la sphère s'effectue de la même façon qu'au problème précédent.

Si $M_Z \neq M_3$, $U_{\text{eff}}(\theta)$ présente un minimum pour $\theta_0 \neq 0, \pi$; au cas où $E = U_{\text{eff}}(\theta_0)$ on a également une rotation stable de la sphère d'angle constant $\theta = \theta_0$, de plus $Z = a - b\cos\theta_0$. Le point de la sphère qui en ce moment est en contact avec le plan possède la vitesse $v = (b\dot{\varphi} + a\dot{\psi}) \sin\theta_0$ qui prend la direction de la ligne des nœuds.

Introduisons maintenant la petite force du frottement sec $\mathbf{f}$. Elle est dirigée du côté opposé à v et se traduit par la variation de l'angle θ_0. Pour $v \gtrless 0$

$$\dot{M}_Z = \mp fb \sin\theta_0, \quad \dot{M}_3 = \mp fa \sin\theta_0, \tag{1}$$

d'où

$$M_Z a - M_3 b = C = \text{const}. \tag{2}$$

Pour une sphère tournant rapidement $M \approx M_3$, $M_Z \approx M\cos\theta_0$ ou compte tenu de (2)

$$M\,(a\cos\theta_0 - b) = C. \tag{3}$$

De là il s'ensuit qu'avec la diminution du moment cinétique par suite du frottement l'angle θ_0 doit décroître si $a\cos\theta_0 - b > 0$ et augmenter si $a\cos\theta_0 - b < 0$. En outre, en vertu de (1), (3) $\dot{\theta}_0 = -fb/aC\,(a\cos\theta_0 - b)^2$.

Le centre des masses se déplace lentement le long de l'axe Z, tandis que dans le plan XY le frottement variable $f_X = -f\cos\varphi$, $f_Y = -f\sin\varphi$ entraîne la rotation du centre des masses suivant le petit cercle à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Il est bien entendu que même un petit frottement aboutira avec le temps à la disparition du patinage, la vitesse du point inférieur de la sphère s'annulant.

b) Soient $\mathbf{R}_c = (X + b\sin\theta\sin\varphi,\ Y - b\sin\theta\cos\varphi,\ a)$ les coordonnées du centre géométrique de la sphère; $\Omega = (\Omega_X, \Omega_Y,$

$\Omega_z) = (\dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \sin\theta \sin\varphi, \quad \dot\theta \sin\varphi - \dot\psi \sin\theta \cos\varphi, \quad \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta)$, la vitesse angulaire de rotation de la sphère et $\mathbf{a} = (0, 0, -a)$ le rayon mené du centre géométrique de la sphère vers le point de contact. Alors la condition de roulement de la sphère sans patinage $\dot{\mathbf{R}}_c + [\mathbf{\Omega a}] = 0$ constitue une liaison non holonome:

$$\begin{aligned} \dot X &= \dot\theta\,(a - b\cos\theta)\sin\varphi - (a\dot\psi + b\dot\varphi)\sin\theta\cos\varphi, \\ \dot Y &= -\dot\theta\,(a - b\cos\theta)\cos\varphi - (a\dot\psi + b\dot\varphi)\sin\theta\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Les équations de mouvement

$$m\ddot X = \lambda_1, \quad m\ddot Y = \lambda_2, \tag{5}$$

$$\dot M_z = (\lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2 \sin\varphi)\, b \sin\theta, \tag{6}$$

$$\dot M_3 = (\lambda_1 \cos\varphi + \lambda_2 \sin\varphi)\, a \sin\theta, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = (-\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_2 \cos\varphi)\,(a - b\cos\theta) \tag{8}$$

contiennent dans les seconds membres des frottements et des moments de ces derniers. Les facteurs de Lagrange λ_1, λ_2 peuvent être exprimés à l'aide des conditions de liaisons (4) en fonction des angles d'Euler. C'est ainsi que les projections du frottement sur la ligne des nœuds $f_{||}$ et sur la direction perpendiculaire $f_\perp$ sont

$$f_{||} = m\dot\theta\dot\varphi\,(a - b\cos\theta) - m\frac{d}{dt}[(a\dot\psi + b\dot\varphi)\sin\theta], \tag{9}$$

$$f_\perp = -m\frac{d}{dt}[\dot\theta\,(a - b\cos\theta)] - m\dot\varphi\,(a\dot\psi + b\dot\varphi)\sin\theta. \tag{10}$$

Notons que (6), (7) se confondront avec (1) si dans les équations (1) on remplace le frottement sec $\mp f$ par le frottement de repos $f_{||}$ (9). Comme auparavant, $M_z a - M_3 b = C$ est une intégrale de mouvement (2).

9.21. En résolvant le problème, il faut se rappeler que la hauteur h du corps au-dessus de la Terre est petite devant le rayon R de cette dernière et que l'accélération centrifuge $R\Omega^2$ (Ω étant la vitesse angulaire de la Terre) est petite devant celle de la chute libre g à la surface de la Terre. Il y a donc dans le problème deux petits paramètres:

$$\varepsilon_1 = h/R \leqslant \varepsilon_2 = R\Omega^2/g \sim 0{,}01.$$

Développons en série dans l'équation de mouvement (γ étant la constante de gravitation, M la masse de la Terre)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma M \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} + 2[\mathbf{v\Omega}] + [\mathbf{\Omega}[\mathbf{R} + \mathbf{r}, \mathbf{\Omega}]] \tag{1}$$

le premier terme de la somme par rapport au petit paramètre $r/R \leqslant \varepsilon_1$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}\Omega] + \mathbf{g}_1 + [\Omega[\mathbf{r}\Omega]], \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{h}, \quad \mathbf{v}(0) = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{g} = -\gamma M \frac{\mathbf{R}}{R^3} + [\Omega[\mathbf{R}\Omega]], \quad \mathbf{g}_1 = \frac{\gamma M}{R^2}\left(3\mathbf{R}\frac{\mathbf{r}\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{r}}{R}\right)[1 + O(\varepsilon_1)].$$

L'accélération de Coriolis $2[\mathbf{v}\Omega] \sim gt\Omega \sim \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}g$ et $g_1 \sim \varepsilon_1 g$ sont du premier ordre de petitesse, tandis que $[\Omega[\mathbf{r}\Omega]] \sim \varepsilon_1\varepsilon_2 g$ l'est du second.

La verticale $\mathbf{h}$, qui est antiparallèle au vecteur $\mathbf{g}$, forme le petit angle $\alpha = \varepsilon_2 \sin\lambda\cos\lambda$ avec la direction du vecteur $\mathbf{R}$ (λ est ici la latitude Nord (géocentrique) engendrant l'angle entre le plan de l'équateur et le vecteur $\mathbf{R}$). Prenons l'axe z suivant la verticale dirigée vers le haut, l'axe x suivant le méridien en direction du Sud et l'axe y suivant la latitude en direction de l'Est, il vient alors

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g), \quad \mathbf{R} = R(\sin\alpha, 0, \cos\alpha), \quad \Omega = \Omega(-\cos(\alpha + \lambda), 0, \sin(\alpha + \lambda)).$$

En approximation zéro la particule se meut avec l'accélération $-g$ sur l'axe z. En première approximation l'accélération de Coriolis n'engendre qu'une déviation vers l'Est, la grandeur de la déviation étant $y \sim \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}gt^2 \sim \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}h$. L'accélération g_1 possède suivant z des composantes $\sim\varepsilon_1 g$, et suivant x et y des composantes d'ordre deux, aussi en première approximation $\mathbf{g}_1$ n'impliquera qu'une augmentation du temps de chute de la hauteur h de la grandeur $\sim\varepsilon_1\sqrt{2h/g}$. La déviation vers le Sud n'apparaît donc que pour le second ordre. Ecrivons l'équation (2) en projections sur les axes choisis ne retenant pour les composantes z, y, x que les termes de petitesse d'ordre zéro, un, deux respectivement:

$$\ddot{z} = -g, \quad \ddot{y} = -2\dot{z}\Omega\cos\lambda;$$

$$\ddot{x} = 2\dot{y}\Omega\sin\lambda + g(3z\sin\alpha - x)/R + \Omega^2 z\sin\lambda\cos\lambda.$$

En résolvant par la méthode d'approximations successives, on obtient

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad y = \frac{1}{3}gt^3\Omega\cos\lambda, \quad x = 2ht^2\Omega^2\sin\lambda\cos\lambda.$$

En reportant le temps de chute $t = \sqrt{2h/g}$, on obtient la déviation vers l'Est et vers le Sud

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{8\varepsilon_1\varepsilon_2}\,h\cos\lambda, \quad x = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 h\sin 2\lambda.$$

9.22. Profitons du système de référence tournant avec le vase; l'axe x sera dirigé le long de AB, l'origine étant placée au point immobile correspondant à l'intersection des axes AB et CD. La vitesse

angulaire du système $\Omega = \omega_1 + \omega_2 = (\omega_2, \omega_1 \cos \omega_2 t, -\omega_1 \sin \omega_2 t)$. Sur chaque particule liquide de masse m dans ce référentiel agissent, outre la force de pesanteur $m\mathbf{g}$, les forces d'inertie (voir [1], § 39): la force de Coriolis $2m\,[\mathbf{v}\Omega]$, la force centrifuge $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{m\,[\Omega \mathbf{r}]^2}{2}$ et la force $m\,[\mathbf{r}\dot{\Omega}]$, où $\dot{\Omega}$ est la vitesse de variation du vecteur Ω dans un référentiel au repos.

Avec le durcissement de la résine les vitesses des particules (relativement au vase) s'annulent et la force de Coriolis s'évanouit. Pour les trois forces restantes la moyenne doit être prise sur les périodes de rotation:

$$\langle m\mathbf{g}\rangle = -mg\,(\langle \cos \omega_1 t\rangle,\ \langle \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t\rangle,$$
$$\langle \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t\rangle) = 0,$$

si $\omega_1 \neq \omega_2$,

$$\langle m\,[\mathbf{r}\dot{\Omega}]\rangle = m\,[\mathbf{r}\,\langle\dot{\Omega}\rangle],\quad \langle\dot{\Omega}\rangle = \langle[\omega_1\omega_2]\rangle = [\langle\omega_1\rangle\,\omega_2] = 0.$$

Enfin en définitive

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{m}{2}\,[\Omega \mathbf{r}]^2 \right\rangle = \frac{m}{2} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}},$$

où

$$U = \langle[\Omega\mathbf{r}]^2\rangle = \langle\Omega^2 r^2 - (\Omega\mathbf{r})^2\rangle =$$
$$= (\omega_1^2 + \omega_2^2)\,r^2 - \langle(x\omega_2 + y\omega_1 \cos \omega_2 t - z\omega_1 \sin \omega_2 t)^2\rangle =$$
$$= \left(\omega_1^2 x^2 + \left(\frac{\omega_1^2}{2} + \omega_2^2\right)(y^2 + z^2)\right). \quad (1)$$

La surface du liquide se dispose suivant la ligne du niveau $U(\mathbf{r}) = \text{const}$. La résine acquerra la forme d'un ellipsoïde de révolution une fois durcie.

Que se produira-t-il si $\omega_1 = \omega_2$?

Pour $g = 0$ et $\omega_2 \to 0$, on obtient, en partant de (1), une solution fausse. Pourquoi?

9.23. $$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E + M\Omega - U_{\text{eff}}}},$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\left(\frac{M}{r^2} - \Omega\right) dr}{\sqrt{E + M\Omega - U_{\text{eff}}}},$$

où E est l'énergie, M le moment cinétique dans le référentiel en rotation, $U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$. Rappelons que $E = E_0 - M\Omega$, $M = M_0$, où E_0 et M_0 sont l'énergie et le moment cinétique dans le système galiléen.

Il est remarquable que l'énergie potentielle centrifuge $-m\Omega^2 r^2/2$ n'entre pas dans U_{eff}.

9.24. Dans le système de coordonnées relié au cadre la fonction de Lagrange du problème considéré coïncide avec celle étudiée au problème 6.36 (pour $z = 0$ et aux paramètres $\omega_{\mathscr{H}} = -2\Omega$, $\omega_{1,2}^2 = \frac{2}{m}\left(k_{1,2} + \frac{f_{1,2}}{l}\right) - \Omega^2$). Pour $\omega_{1,2}^2 > 0$ le mouvement de la particule coïncide avec celui de l'oscillateur anisotrope plongé dans le champ magnétique $\mathscr{H} = -2mc\Omega/e$. La trajectoire de la particule au cas où $\omega_1 = \omega_2$ est représentée sur la figure 97 adjointe au problème 2.32. En particulier, si $\omega_1 = \omega_2 = 0$, le mouvement de la particule se confond avec celui de la particule libre évoluant dans le champ magnétique $x = x_0 + a \cos \omega_{\mathscr{H}} t$, $y = y_0 - a \sin \omega_{\mathscr{H}} t$, autrement dit la particule effectue un mouvement uniforme sur un cercle de rayon a et de centre au point (x_0, y_0). Il est intéressant d'élucider à quel mouvement de particules dans le système de coordonnées au repos correspond ce dernier cas, en particulier, quand $a = 0$ ou quand $x_0 = y_0 = 0$.

Si la force centrifuge dépasse les forces de rappel émanant des deux ressorts, $\omega_{1,2}^2 < 0$, la particule continue à effectuer de petites oscillations. Bien que l'énergie potentielle ait pour $x = y = 0$ un maximum, la stabilité de cette position d'équilibre est maintenue grâce à la force de Coriolis.

Si, par contre, ω_1^2 et ω_2^2 sont de signe contraire (c'est-à-dire si $x = y = 0$ est le point col de l'énergie potentielle) cette position d'équilibre est alors instable.

Il est intéressant de confronter ces résultats avec la réponse obtenue au problème 5.4. Dans le référentiel en rotation avec la vitesse angulaire Ω le point r_0, φ_0 est situé sur la crête de la « cuvette de potentiel »: l'énergie potentielle $U = -\frac{\alpha}{r^n} - \frac{m\Omega^2 r^2}{2}$ possède un maximum par rapport au déplacement en direction du rayon vecteur et ne varie pas en cas de déplacement dans la direction azimutale. Dans ce cas l'une des oscillations naturelles s'effectue avec la pulsation ω, quant à la pulsation de l'autre oscillation elle s'annule: la position d'équilibre est indifférente vis-à-vis de certaines perturbations (par exemple, en cas de variation de φ_0).

9.25. La fonction de Lagrange

$$L = \frac{m}{2}(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])^2 + m\mathbf{g}\mathbf{r} =$$
$$= \frac{m}{2}\left[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2 - g\left(\frac{x^2}{a} \frac{y^2}{b}\right)\right].$$

Pour de petites oscillations on peut laisser tomber $\dot{z}$ et les équations de mouvement deviennent

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)x = 0, \\ &\ddot{y} + 2\omega\dot{x} + \left(\frac{g}{b} - \omega^2\right)y = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Cherchons la solution sous forme

$$x = Ae^{i\Omega t}, \quad y = Be^{i\Omega t}$$

et l'on obtient pour Ω^2 l'équation

$$\Omega^4 - \left(\frac{g}{a} + \frac{g}{b} + 2\omega^2\right)\Omega^2 + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{b} - \omega^2\right) = 0.$$

Il est aisé de constater que ses racines sont réelles. Cependant pour

$$\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{b} - \omega^2\right) < 0$$

l'une des racines $\Omega_1^2 < 0$, de sorte que le mouvement correspondant

$$x = A_1 e^{[\Omega_1]t} + A_2 e^{-[\Omega_1]t},$$
$$y = B_1 e^{[\Omega_1]t} + B_2 e^{-[\Omega_1]t}$$

aboutit à la sortie de la particule de l'origine de coordonnées. Cela signifie justement que la position inférieure de la particule est instable. En posant, pour plus de netteté, que $a > b$, on obtient un domaine d'instabilité

$$\frac{g}{a} < \omega^2 < \frac{g}{b}.$$

Remarquons que pour $\omega^2 > g/b$ le mouvement est stable bien que l'énergie potentielle dans le système de référence en rotation

$$U = -\frac{m}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)x^2 - \frac{m}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{b}\right)y^2$$

soit non pas une cuvette mais une colline potentielle. La stabilité dans ce cas est assurée par l'action de la force de Coriolis.

9.26. a) L'énergie potentielle (y compris la force centrifuge) est

$$U(x) = k(x-a)^2 - \frac{m\gamma^2 x^2}{2}.$$

La condition $U'(x_0) = 0$ définit la position d'équilibre

$$x_0 = \frac{2ka}{2k - m\gamma^2}.$$

Il est intéressant de noter que pour une pulsation de rotation γ supérieure à la pulsation propre des oscillations de la particule $\sqrt{2k/m}$, il s'avère que $x_0 < 0$, tandis que pour $m\gamma^2 \gg 2k$ la position d'équilibre est proche de l'axe de rotation.

Le signe de $U''(x_0) = 2k - m\gamma^2$ est déterminant pour la stabilité de la position d'équilibre : pour $m\gamma^2 < 2k$ l'équilibre est stable ; pour $m\gamma^2 > 2k$ il est instable.

b) Vraisemblablement, la position d'équilibre est celle trouvée au point a). A des fins d'étude de la stabilité, examinons l'énergie potentielle pour de petits écarts de la position d'équilibre:

$$U(x, y, z) = U(x_0, 0, 0) + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2} + k_1 \frac{(x - x_0)^2}{2},$$

où

$$k_1 = 2k - m\gamma^2,$$

$$k_2 = \frac{f + k(x_0 - a)}{l + x_0 - a} + \frac{f - k(x_0 - a)}{l - x_0 + a} - m\gamma^2 = -m\gamma^2 + k_3.$$

La comparaison avec le problème 9.24 aboutit à la conclusion que l'équilibre n'est instable qu'au cas où k_1 et k_2 ont des signes opposés. En particulier, pour $m\gamma^2 \gg 2k + 2f/l$ l'équilibre est stable nonobstant le résultat obtenu au point a). Si, par contre, $k_1 k_2 < 0$, l'écartement de la particule du point $(x_0, 0, 0)$ s'accroît dans le temps (tant que ne devienne sensible l'influence des parois du cadre qu'on a négligée).

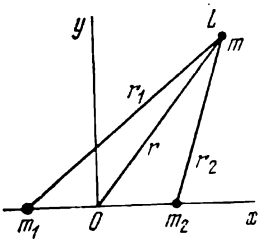


Fig. 152

9.27. Profitons des coordonnées cartésiennes du système de référence en rotation. Plaçons l'origine des coordonnées au centre des masses, le système étant mis en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe z; quant aux étoiles, elles se disposent sur l'axe x (fig. 152).

Supposons que les distances séparant les étoiles du centre de masse soient $a_{1,2} = \mp \frac{m_{2,1} a}{m_1 + m_2}$, où $m_{1,2}$ sont les masses des étoiles, a la distance entre elles. De l'égalité

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a\omega^2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{a^2}$$

(γ étant la constante de gravitation), on tire

$$\omega^2 = \gamma \frac{m_1 + m_2}{a^3}.$$

L'énergie potentielle du corps de masse m (y compris l'énergie centrifuge) est

$$U(x, y, z) = -\frac{\gamma m m_1}{r_1} - \frac{\gamma m m_2}{r_2} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

où $r_{1,2}$ sont les distances jusqu'aux étoiles, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ le rayon vecteur du corps. La position d'équilibre du corps se définit par la

condition $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0$ ou

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \gamma m \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{m_1 + m_2}{a^3} \right) x - \gamma m \left(\frac{m_1 a_1}{r_1^3} + \frac{m_2 a_2}{r_2^3} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \gamma m \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{m_1 + m_2}{a^3} \right) y = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \gamma m \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) z = 0.$$

De là on tire $z = 0$ et (pour $y \neq 0$) $r_1 = r_2 = a$.

Les étoiles, de même que le point d'équilibre occupent donc les sommets d'un triangle équilatéral. Ces points au nombre de deux, dits points de Lagrange, sont $x_0 - a_1 = a_2 - x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $z_0 = 0$.

Au voisinage des points de Lagrange

$$U(x_0 + x_1,\ y_0 + y_1,\ z_0 + z_1) =$$

$$= U(x_0,\ y_0,\ z_0) - \frac{3}{8} m\omega^2 x_1^2 - 2m\alpha x_1 y_1 - \frac{9}{8} m\omega^2 y_1^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 z_1^2,$$

$$\alpha = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4a^3} \gamma (m_1 - m_2).$$

Le mouvement en direction de z est, vraisemblablement, stable. Les équations de mouvement dans le plan x, y sont:

$$\ddot{x}_1 - \frac{3}{4} \omega^2 x_1 - 2\alpha y_1 - 2\omega \dot{y}_1 = 0,$$

$$\ddot{y}_1 - \frac{9}{4} \omega^2 y_1 - 2\alpha x_1 + 2\omega \dot{x}_1 = 0. \qquad 1268\ 3$$

La substitution $x = Ae^{i\Omega t}$, $y = Be^{i\Omega t}$ aboutit à l'équation pour Ω:

$$\Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 + \frac{27}{16} \omega^4 - 4\alpha^2 = 0.$$

Ses racines sont réelles pour $64\alpha^2 \geqslant 23\omega^4$, c'est-à-dire pour $(m_1 + m_2)^2 \geqslant 27 m_1 m_2$. Cette condition est satisfaite si la masse de l'une des étoiles est au moins 25 fois supérieure à celle de l'autre. Dans ce cas le mouvement des corps au voisinage des points de Lagrange est stable. La stabilité du mouvement est assurée par les forces de Coriolis (comp. avec problème 9.25).

Sur l'axe x il y a trois points pour lesquels $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0$, or le mouvement au voisinage de ces points est instable.

Pour le système Soleil-Jupiter on observe aux points de Lagrange des astéroïdes.

9.28. Examinons les oscillations dans le référentiel mis en rotation avec la molécule. La fonction de Lagrange s'obtient à partir de (1) par substitution de $\mathbf{u}_a + [\Omega, \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a]$ à $\mathbf{u}_a$, la vitesse angulaire de rotation du référentiel étant choisie égale à la vitesse angulaire de rotation de la molécule en l'absence des oscillations $\Omega m \sum r_{a0}^2 = M$. La condition (3) du problème 6.49, qui est équivalente à l'exigence $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, est négligée. En introduisant $q_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(y_1 + y_2 + y_3)$ et en s'abstenant des termes quadratiques en Ω *), on peut transcrire la fonction de Lagrange sous la forme

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) - \frac{3k}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \\ + m\Omega(q_1\dot{q}_4 - q_4\dot{q}_1) + \frac{2}{3}m\Omega(q_2\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_2).$$

Les équations de mouvement aboutissent à des oscillations naturelles

$$q_1^{(1)} = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad q_4^{(1)} = 2\frac{\Omega}{\omega_1} A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$q_{2,3}^{(1)} = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}},$$

$$q_2^{(2,3)} = A_{2,3} \cos(\omega_{2,3} t + \varphi_{2,3}),$$

$$q_3^{(2,3)} = \pm A_{2,3} \sin(\omega_{2,3} t + \varphi_{2,3}),$$

$$q_{1,4}^{(2,3)} = 0, \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{3k}{2m}},$$

$$q_1^{(4)} = \frac{2\Omega}{\omega_1^2} C, \quad q_{2,3}^{(4)} = 0,$$

$$q_4^{(4)} = Ct + D.$$

Au lieu de la condition (3) du problème 6.49, on obtient

$$\sum_a \{[\mathbf{r}_{a0}\dot{\mathbf{u}}_a] + 2\Omega(\mathbf{r}_{a0}\mathbf{u}_a)\} = 0,$$

ou $\dot{q}_4 - 2\Omega q_1 = 0$, ce qui répond au choix de $C = 0$. Il est aussi commode de poser la constante D, déterminant la rotation initiale de la molécule relativement au référentiel mis en rotation, égale à zéro.

Quel est l'aspect des oscillations si dans le référentiel en rotation l'écartement à l'instant origine est de la forme représentée sur la figure 133 et les vitesses initiales sont nulles?

*) La prise en compte de ces corrections conduirait aux substitutions:

$$k \to k - \frac{m\Omega^2}{6}, \quad l \to l\left(1 + \frac{m\Omega^2}{2k}\right), \quad \Omega \to \Omega\left(1 - \frac{m\Omega^2}{k}\right).$$

§ 10. Équations de Hamilton. Crochets de Poisson

10.1. Soit ε le vecteur écartement infiniment petit; en outre

$$\mathbf{r}_a \to \mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \varepsilon, \quad \mathbf{p}_a \to \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a,$$
$$H(\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a) = H(\mathbf{r}'_a, \mathbf{p}'_a).$$

De là $\sum\limits_a \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} = 0$. En utilisant l'équation de Hamilton, il vient :

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_a \dot{\mathbf{p}}_a = -\sum_a \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} = 0, \quad \mathbf{P} = \text{const}.$$

Avec une rotation infiniment petite $\delta\varphi$

$$\mathbf{r}_a \to \mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + [\delta\varphi \mathbf{r}_a], \quad \mathbf{p}_a \to \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a + [\delta\varphi \mathbf{p}_a],$$
$$H(\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a) = H(\mathbf{r}'_a, \mathbf{p}'_a), \sum_a \left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} \mid \delta\varphi \mathbf{r}_a \mid + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_a} \mid \delta\varphi \mathbf{p}_a \mid = \right.$$
$$= 0 = \sum_a \left\{ -\dot{\mathbf{p}}_a (\delta\varphi \mathbf{r}_a] + \dot{\mathbf{r}} [\delta\varphi \mathbf{p}_a] \right\} = -\delta\varphi \sum_a \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a].$$

où

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \text{const}.$$

10.2. $H = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$.

10.3. $H = \frac{p^2}{2(1+2\beta x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3$.

En particulier, pour de petites oscillations ($|\alpha x| \ll \omega^2$, $|\beta x| \ll 1$)

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 - \beta x p^2 + 2\beta^2 x^2 p^2 - \ldots,$$

et à la précision jusqu'aux termes linéaires en α et β près l'adjonction à la fonction de Hamilton de l'oscillateur harmonique est liée à l'adjonction à la fonction de Lagrange par la relation $\delta H = -\delta L$ (comp. avec [1], § 40).

10.4. $x = a\cos(\omega t + \varphi)$, $p = -\omega_0 a \sin(\omega t + \varphi)$, où $\omega = (1 + 2\lambda E_0)\omega_0$, $E_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 a^2$.

10.5. $\mathbf{r} = \frac{c\mathbf{p}}{np} - \frac{cp}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}$, $\dot{\mathbf{p}} = \frac{cp}{n^2}\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}$, $p = |\mathbf{p}|$.

La fonction de Hamilton proposée décrit la propagation de la lumière dans un milieu transparent avec l'indice de réfraction n dans l'approximation de l'optique géométrique (voir [3], § 65). La « par-

ticule » est mimée par le paquet d'ondes, $\mathbf{r}(t)$ étant justement la loi de son mouvement ; $\dot{\mathbf{r}}$ est la vitesse de groupe, tandis que $\mathbf{p}$, perpendiculaire au front d'ondes, définit le vecteur d'onde.

La trajectoire pour $n(\mathbf{r}) = ax$ est

$$x = C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{y}{C_1} + C_2\right),$$

où C_1, C_2 se déterminent par les points initial et final de la trajectoire.

10.6. a) $L = \frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{a})^2}{2}$; b) $L = 0$;

ces « particules » ne peuvent être décrites à l'aide de la fonction de Lagrange (voir [2], § 53).

10.7. Le potentiel vecteur donné définit le champ $\mathcal{H}$ magnétique dirigé parallèlement à l'axe z.

La fonction de Hamilton est

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{e}{c}\mathcal{H}x\right)^2.$$

Puisque H ne dépend pas de y et z, on a $p_y = \text{const}$, $p_z = \text{const}$. En posant $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m}$, où $\omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$, $x_0 = \frac{cp_y}{e\mathcal{H}}$, on constate que pour x, p_x la fonction de Hamilton est la même que pour l'oscillateur harmonique. Donc

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) + x_0, \quad p_x = -m\omega a \sin(\omega t + \varphi).$$

Pour déterminer y et z, profitons des équations

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{e}{c}\mathcal{H}x\right) = -\omega a \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

d'où

$$y = -a\sin(\omega t + \varphi) + y_0, \quad z = \frac{p_z}{m}t + z_0.$$

La particule se meut sur une ligne en vis à axe parallèle à $\mathcal{H}$. L'impulsion généralisée p_y détermine la distance séparant cet axe du plan yz.

10.8. Le champ magnétique est dirigé suivant l'axe z et vaut $2hx$. Le mouvement sur l'axe z est uniforme. En s'abstrayant de ce mouvement, étudions celui qui s'effectue sur le plan xy. La fonction de Hamilton

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eh}{c}x^2\right)^2$$

ne dépend pas de y et t. Donc les intégrales de mouvement sont l'impulsion généralisée p_y et l'énergie E:

$$p_y = m\dot{y} + \frac{eh}{c}x^2;$$

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U_{\text{eff}}(x), \quad U_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{eh}{c}x^2\right)^2.$$

Pour $p_y \leqslant 0$ le graphique $U_{\text{eff}}(x)$ est donné sur la figure 153, quant à l'aspect approximatif de la trajectoire, il est représenté sur

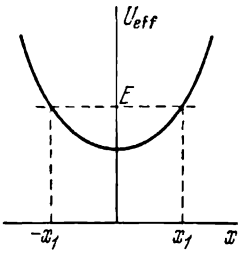


Fig. 153

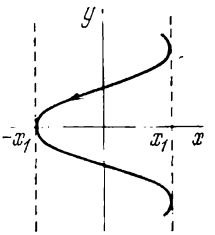


Fig. 154

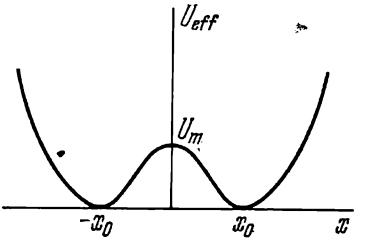


Fig. 155

la figure 154. Il est nécessaire de tenir compte de ce que la vitesse

$$\dot{y} = -\frac{|p_y|}{m} - \frac{eh}{mc}x^2$$

est toujours négative en oscillant autour de la valeur de p_y/m.

Pour $p_y > 0$, le graphique

$$U_{\text{eff}}(x) = \frac{e^2h^2}{2mc^2}(x^2 - x_0^2)^2, \quad x_0 = \sqrt{\frac{p_y c}{eh}}$$

est donné sur la figure 155. La vitesse

$$\dot{y} = \frac{eh}{mc}(x_0^2 - x^2)$$

pour toute valeur de E peut être aussi bien positive que négative. La figure 156 donne une image approximative des trajectoires, a — e correspondant à des valeurs décroissantes de l'énergie.

Pour des grandes énergies, $E \gg U_m = p_y^2/2m$, l'amplitude des oscillations suivant l'axe x est grande et la valeur moyenne de $\langle x^2 \rangle$ sur une période est supérieure à x_0^2. Aussi la valeur moyenne égale à

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{eh}{mc}(x_0^2 - \langle x^2 \rangle)$$

est-elle négative (voir fig. 156, a). Avec la diminution de l'énergie $\langle \dot{y} \rangle$ s'accroît jusqu'à zéro (fig. 156, b), puis devient positif

(fig. 156, *c*). Pour la valeur de $E = U_m$ la particule, pour laquelle à l'origine $x > x_0$ et $\dot{x} < 0$, se rapproche asymptotiquement de l'axe y (fig. 156, *d*).

Enfin pour $E < U_m$ la particule se meut soit dans la région proche de $(-x_0)$, soit dans celle proche de x_0 (fig. 156, *e*). On peut montrer que dans ce cas $\langle \dot{y} \rangle$ est plus grand que zéro. Pour $| x - x_0 | \ll$

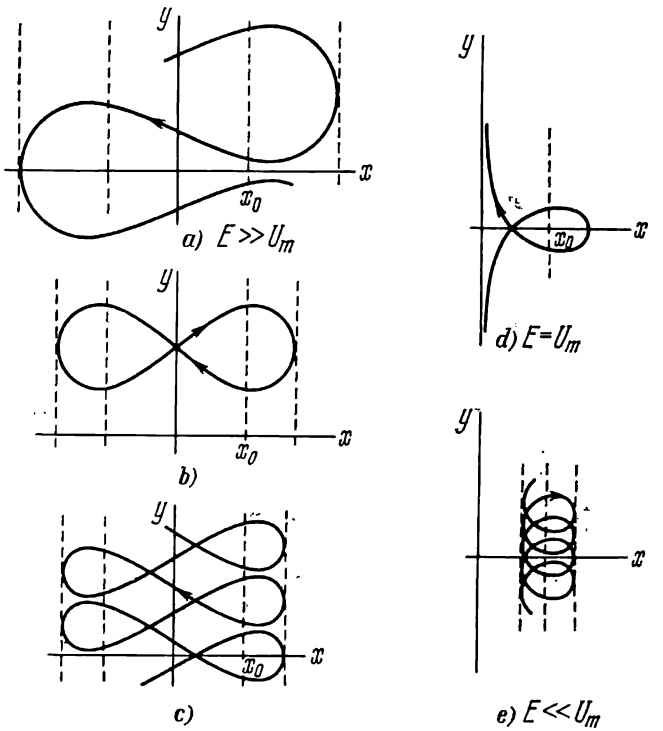


Fig. 156

$\ll x_0$ la particule décrit un cercle dont le centre dérive lentement sur l'axe y. Pour obtenir la vitesse de la dérive, il faut, dans le calcul de $\langle x^2 \rangle$, tenir compte des premières corrections anharmoniques

$$x = x_0 + a \cos \omega t - \frac{a^2}{4x_0} (3 - \cos 2\omega t),$$

soit

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{cE}{2hx_0^2 e}$$

(comp. avec problème 8.14).

10.9. En introduisant les coordonnées du centre des masses **R** et le mouvement relatif **r** (comp. avec problèmes 2.25 et 2.26), représentons la fonction de Lagrange sous la forme

$$L=\frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2+\frac{e}{2c}[\mathcal{H}\mathbf{r}]\dot{\mathbf{R}}+L_1(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})+\frac{e}{2c}[\mathcal{H}\mathbf{R}]\dot{\mathbf{r}},\quad M=m_1+m_2, \tag{1}$$

où

$$L_1(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2+\frac{e}{2c}[\mathcal{H}'\mathbf{r}]\dot{\mathbf{r}}+\frac{e^2}{r}\left(\mathcal{H}'=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\mathcal{H}\right),$$

m étant la masse réduite.

Le dernier terme de (1) sera récrit sous forme de

$$\frac{e}{2c}[\mathcal{H}\mathbf{R}]\dot{\mathbf{r}}=\frac{e}{2c}[\mathcal{H}\mathbf{r}]\dot{\mathbf{R}}+\frac{d}{dt}\frac{e}{2c}[\mathcal{H}\mathbf{R}]\mathbf{r}.$$

En éliminant la dérivée totale par rapport au temps, il vient

$$L=\frac{M}{2}\dot{\mathbf{R}}^2+\frac{e}{c}[\mathcal{H}\mathbf{r}]\dot{\mathbf{R}}+L_1(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}).$$

Cette fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement de **R**, aussi l'impulsion généralisée se conserve-t-elle

$$P=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}=M\dot{\mathbf{R}}+\frac{e}{c}[\mathcal{H}\mathbf{r}]=\text{const}. \tag{2}$$

La fonction de Hamilton du système prend la forme

$$H=\frac{1}{2M}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}[\mathcal{H}\mathbf{r}]\right)^2+\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{2c}[\mathcal{H}'\mathbf{r}]\right)^2-\frac{e^2}{r}.$$

De là, compte tenu de (2), il apparaît que la particule de masse m se meut dans un champ magnétique uniforme $\mathcal{H}'$ et dans le champ de force d'énergie potentielle

$$U=-\frac{e^2}{r}+\frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}[\mathcal{H}\mathbf{r}]\right)^2.$$

Si l'axe z est dirigé suivant $\mathcal{H}$, on a alors

$$U=-\frac{e^2}{r}+\frac{1}{2}m\omega^2[(x-a)^2+(y-b)^2]+\text{const},$$

$$\omega=\frac{e\mathcal{H}}{c\sqrt{m_1m_2}},\quad a=-\frac{cP_x}{e\mathcal{H}},\quad b=\frac{cP_y}{e\mathcal{H}}.$$

Après avoir trouvé $\mathbf{r}(t)$, la loi de mouvement du centre des masses s'obtient à partir de l'équation (2)

$$\mathbf{R}(t)=\frac{\mathbf{P}t}{M}-\frac{e}{Mc}\left[\mathcal{H}\int_0\mathbf{r}(t)\,dt\right]+\mathbf{R}_0.$$

10.10.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + e\mathfrak{E}t, \quad \varepsilon(\mathbf{p}) - e\mathfrak{E}\mathbf{r} = \mathbf{E}_0,$$
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\, e\mathfrak{E} = \varepsilon(\mathbf{p}_0 + e\mathfrak{E}t) - \varepsilon(\mathbf{p}_0).$$

10.11.

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathfrak{H}]\ ^{*)}.$$

10.12. a) $\varepsilon(\mathbf{p}) = E$, $p_{\mathscr{H}} = \text{const}$, où $p_{\mathscr{H}}$ est la projection de l'impulsion sur la direction du champ magnétique $\mathfrak{H}$. La trajectoire dans l'espace du momentum se détermine par la ligne d'intersection de deux surfaces: $\varepsilon(\mathbf{p}) = E$ et $p_{\mathscr{H}} = \text{const}$.

b) De l'équation du mouvement $\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{r}\mathfrak{H}]$ on voit que la projection de la trajectoire de l'électron sur le plan perpendiculaire au champ magnétique $\mathfrak{H}$ s'obtient de la trajectoire de l'espace du momentum par rotation de l'angle $\pi/2$ autour de $\mathfrak{H}$ et par modification de l'échelle $\frac{c}{e\mathscr{H}}$ fois.

10.13.

$$T = -\frac{c}{e\mathscr{H}} \oint \frac{dp}{|\mathbf{v}_\perp|}, \quad S = \int_{E_{\min}}^{E} dE \oint \frac{dp}{|\mathbf{v}_\perp|}$$
$$T = -\frac{\partial S}{\partial E},$$

où $\mathbf{v}_\perp$ est la composante du vecteur $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}$ orthogonale à $\mathfrak{H}$.

10.14. a) $-\sum_k e_{ijk}x_k$ **), $-\sum_k e_{ijk}p_k$, $-\sum_k e_{ijk}M_k$.

b) $\mathbf{ab}$.

$$\{\mathbf{aM}, \mathbf{br}\} = \{\sum_i a_i M_i, \sum_j b_j x_j\} = \sum_{ij} a_i b_j \{M_i\ x_j\} =$$
$$= -\sum_{jik} a_i b_j e_{ijk} x_k = -[\mathbf{ab}]\,\mathbf{r}, \quad -[\mathbf{ab}]\,\mathbf{M}.$$

c) 0, nrr^{n-2}, $2\mathbf{a}(\mathbf{ar})$.

10.15. $\{A_i, A_j\} = -\sum_k e_{ijk}A_k$, $\{A_i, A_4\} = 0$, i, j, k prenant ici les valeurs 1, 2, 3 (comp. avec problème 10.14a).

---

*) Pour plus de détails sur le mouvement des électrons dans le métal (problème 10.9-10.13), voir, par exemple [18], [25], § 4.

**) e_{ijk} est un tenseur parfaitement antisymétrique,

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1, \quad e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1;$$

les autres composantes de e_{ijk} sont nulles.

10.16. $\{M_i, \Lambda_{jk}\} = -\sum_l e_{ijl}\Lambda_{lk} - \sum_l e_{ikl}\Lambda_{ij}$, $\{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\} = \delta_{ij}M_{lk} + \delta_{ik}M_{lj} + \delta_{ji}M_{ik} + \delta_{kl}M_{ij}$,

où $M_{kl} = p_k x_l - p_l x_k$.

10.17. Dans la rotation du système en bloc d'un angle infiniment petit ε autour de l'axe z la variation $\delta\varphi$ en premier ordre en ε de toute fonction de coordonnées et d'impulsions vaut

$$\delta\varphi = \varphi(x - \varepsilon y,\ y + \varepsilon x,\ z,\ p_x - \varepsilon p_y,\ p_y + \varepsilon p_x,\ p_z) - \varphi(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \varepsilon\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}x - \frac{\partial\varphi}{\partial p_x}p_y + \frac{\partial\varphi}{\partial p_y}p_x\right) = \varepsilon\{M_z, \varphi\}.$$

Si φ est un scalaire, sa variation dans la rotation est nulle. Donc $\{\varphi, M_z\} = 0$. Si $\varphi = f_x$ est une composante de la fonction vectorielle, sa variation dans la rotation $\delta f_x = -\varepsilon f_y$, et, par suite,

$$\{M_z, f_x\} = -f_y \quad \text{ou} \quad \{M_z, \mathbf{f}\} = [\mathbf{nf}]$$

(comp. avec [1], § 42, problème 3,4). Quelle est la valeur des crochets de Poisson $\{M_z, T_{xx}\}$, où T_{xx} est la composante de la fonction tensorielle ?

10.18.

$$\{\mathbf{f}, \mathbf{aM}\} = [\mathbf{f}, \mathbf{a}], \quad \{\mathbf{fM}, \mathbf{lM}\} = [\mathbf{fl}]\,\mathbf{M} + \sum_{ik} M_i M_k \{f_i, l_k\}.$$

10.19. En posant dans la seconde formule du problème précédent $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\zeta$ et $\mathbf{l} = \mathbf{e}_\xi$, où $\mathbf{e}_\zeta$ et $\mathbf{e}_\xi$ sont les vecteurs unités des axes ζ et ξ dans le système mobile de coordonnées, il vient

$$\{M_\zeta, M_\xi\} = +M_\eta. \tag{1}$$

Cette égalité se différencie par le signe du second membre de la relation analogue obtenue pour la projection du moment sur les axes d'un système de coordonnées au repos

$$\{M_z, M_x\} = -M_y. \tag{2}$$

Comme il a été montré au problème 10.17 (voir également [4], § 8.7), les crochets de Poisson (2) caractérisent la variation de la composante M_x dans la rotation du système en bloc d'angle infiniment petit ε (fig. 157, *a*) $\delta M_x = \varepsilon\{M_z, M_x\} = -\varepsilon M_y$. Les crochets de Poisson (1), égaux à

$$\{\mathbf{e}_\zeta \mathbf{M}, \mathbf{e}_\xi \mathbf{M}\} = \{\mathbf{M}_\zeta, \mathbf{e}_\xi\}\mathbf{M},$$

caractérisent la variation de la projection du vecteur immobile $\mathbf{M}$ sur l'axe $\mathbf{e}_\xi$ dans une rotation d'angle infiniment petit du système de coordonnées au repos autour de l'axe ζ (fig. 157, *b*; sur cette fi-

gure les axes ξ, η, ζ coïncident avant la rotation d'axes x; y, z).

10.20. $\dot{M}_\alpha = \sum_{\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta\gamma} (I^{-1})_{\gamma\delta} M_\beta M_\delta$,

en particulier, si le système mobile est choisi de façon que le tenseur d'inertie $I^{\alpha\beta}$ soit diagonal, on obtient alors l'équation d'Euler (voir [1], § 36, compte tenu de la relation $M_\alpha = I_\alpha \Omega_\alpha$).

10.21. Les équations de mouvement sont:

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\} = \gamma e_{ijk} M_j \mathcal{H}_k, \text{ ou } \dot{\mathbf{M}} = -\gamma [\mathcal{H}\mathbf{M}],$$

c'est-à-dire que le vecteur $\mathbf{M}$ tourne à la vitesse angulaire $-\gamma\mathcal{H}$.

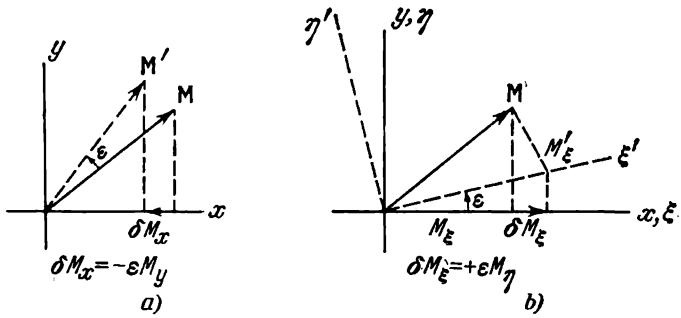


Fig. 157

a) Le vecteur $\mathbf{M}$ est en précession autour de la direction $\mathcal{H}$:

$$M_x = M_x(0) \cos \gamma\mathcal{H}_0 t + M_y(0) \sin \gamma\mathcal{H}_0 t,$$
$$M_y = -M_x(0) \sin \gamma\mathcal{H}_0 t + M_y(0) \cos \gamma\mathcal{H}_0 t,$$
$$M_z = M_z(0).$$

b) Le vecteur $\mathbf{M}$ tourne à la vitesse angulaire $-\gamma\mathcal{H}$ qui, de son côté, est en rotation autour de l'axe z à la vitesse angulaire ω. Il est commode de recourir à un référentiel en rotation dans lequel le vecteur $\mathcal{H}$ est au repos. Dans ce référentiel les composantes de la vitesse angulaire du vecteur $\mathbf{M}$ sont:

$$\omega'_x = -\gamma\mathcal{H}_1, \quad \omega'_y = 0, \quad \omega'_z = -\gamma\mathcal{H}, \quad -\omega \equiv \varepsilon.$$

Aux conditions initiales données les composantes de $\mathbf{M}$ dans le référentiel en rotation sont

$$M'_x = -a\frac{\varepsilon}{\lambda} M_0 (1 - \cos \lambda t), \quad M'_y = aM_0 \sin \lambda t,$$
$$M'_z = \left(\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} + a^2 \cos \lambda t\right) M_0,$$

où $\lambda = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2\mathcal{H}_1^2}$, $a = \gamma\mathcal{H}_1 / \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2\mathcal{H}_1^2}$.

Dans un référentiel immobile

$$M_x = M'_x \cos \omega t - M'_y \sin \omega t,$$
$$M_y = M'_x \sin \omega t + M'_y \cos \omega t,$$
$$M'_z = M_z.$$

Pour $\mathscr{H}_1 \ll \mathscr{H}_0$ la dépendance des amplitudes $M_{x,y}$ de ω est de nature d'une résonance; en général ces amplitudes sont petites $\sim M_0 \mathscr{H}_1 / \mathscr{H}_0$; toutefois, pour $|\varepsilon| = |\omega + \gamma \mathscr{H}_0| \lesssim \gamma \mathscr{H}_1$ elles s'accroissent brusquement et atteignent les valeurs $\sim M_0$. En particulier, pour $\omega = -\gamma \mathscr{H}_0$

$$M_x = -M_0 \sin \gamma \mathscr{H}_1 t \sin \gamma \mathscr{H}_0 t,$$
$$M_y = M_0 \sin \gamma \mathscr{H}_1 t \cos \gamma \mathscr{H}_0 t$$
$$M_z = M_0 \cos \gamma \mathscr{H}_1 t.$$

10.22. $\{v_i, v_j\} = -\frac{e}{m^2 c} \sum_k e_{ijk} \mathscr{H}_k.$

10.23. a) $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} + \mathbf{F}t, \ \mathbf{r}(t) = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}t}{m} + \frac{\mathbf{F}t^2}{2m}$;

b) $p(t) = p \cos \omega t - m\omega q \sin \omega t,$

$$q(t) = q \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t.$$

Il est, bien entendu, plus simple de calculer les grandeurs sans recourir aux crochets de Poisson. Mais la méthode proposée peut aisément être adoptée à la mécanique quantique (voir [26], § 34).

10.25. a) En conformité avec le problème précédent

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} = \frac{\partial H}{\partial f} \{f, f\} = 0.$$

b) La fonction de Hamilton

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} f(\theta, p_\theta, p_\varphi),$$

où

$$f(\theta, p_\theta, p_\varphi) = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + 2ma \cos \theta.$$

Les intégrales de mouvement sont: E, p_φ et, d'après l'exposé précédent, f.

10.26. *a)* $\{A_i, A_j\} = -\frac{2H}{m} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} M_k,$

$$\{A_i, M_j\} = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_k;$$

b) $\{H, \mathbf{J}_{1,2}\}=0$, $\{J_{1i}, J_{2j}\}=0$,

$$\{J_{1i}, J_{1j}\}=-\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}J_{1k}, \quad \{J_{2i}, J_{2j}\}=-\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}J_{2k},$$

$$H=-\frac{m\alpha^2}{4(\mathbf{J}_1^2+\mathbf{J}_2^2)}.$$

Les vecteurs $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{J}_2$ sont des intégrales de mouvement indépendantes. Chacun d'eux possède pour ses composantes des crochets de Poisson identiques à ceux du moment cinétique ordinaire. La présence de deux de ces « moments » est étroitement liée à la « symétrie dite discrète » de l'atome d'hydrogène (voir [27], ch. I, § 5).

§ 11. Transformations canoniques

11.1. a) $q=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$, $p=\sqrt{2m\omega P}\cos Q$,

$$\dot{Q}=\omega+\frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2Q, \quad \dot{P}=-P\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2Q.$$

Dans le cas donné P et Q sont des variables d'action — angle. Ces variables sont plus commodes que p et q pour la résolution du problème par la méthode de la théorie des perturbations au cas où la pulsation ω varie lentement: $\dot{\omega} \ll \omega^2$ (voir problème 13.9).

b) $q=\frac{F}{m\omega^2}+\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$, $p=\sqrt{2m\omega P}\cos Q$,

$$\dot{Q}=\omega+\dot{F}\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\cos Q, \; \dot{P}=\dot{F}\sqrt{2m\omega P}\sin Q.$$

11.2. $\Psi(p, Q)=-Q\left(1+\ln\frac{p^2}{4Q}\right)$.

11.3. La fonction $\Phi(q_1, q_2, \ldots, q_s, P_1, P_2, \ldots, P_s)$ définit la transformation canonique si $\det\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_i\partial P_k}\neq 0$.

11.4. Soient $Q=q\cos\alpha-p\sin\alpha$, $P=q\sin\alpha+p\cos\alpha$. Dans ce cas $\{P, Q\}_{p,q}=-\{q, p\}_{p,q}$, $\sin^2\alpha+\{p, q\}_{p,q}\cos^2\alpha=1$. Dans un système à un degré de liberté cette condition est suffisante pour que la transformation soit canonique.

11.5. Il est aisé de se convaincre (ce qui d'ailleurs est confirmé par les calculs subséquents) que la transformation canonique doit être proche de la transformation identique, tandis que les termes ax^2P et bP^3 de la fonction génératrice sont petits. Pour résoudre les relations

$$p=P+2axP, \quad Q=x+ax^2+3bP^2,$$

qui déterminent la transformation canonique relativement à x et p, substituons dans les petits termes Q à x et P à p:

$$p = P + 2aQP, \quad x = Q - aQ^2 - 3bP^2. \tag{1}$$

De façon analogue on procède en exprimant la fonction de Hamilton en nouvelles variables:

$$H'(Q, P) = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2 Q^2}{2} + \alpha Q^3 + \beta QP^2 + 2a\,QP^2 - a\omega^2 Q^3 - 3b\omega^2 QP^2 +$$
$$+ \text{les termes de quatrième puissance en } Q,\ P.$$

En admettant $\alpha - a\omega^2 = 0$, $\beta + 2a - 3b\omega^2 = 0$ rendons nuls les termes de troisième puissance. Donc, suivant l'approximation adoptée dans le problème $Q = A\cos\omega t$, $P = -\omega A\sin\omega t$ et selon (1) $x = A\cos\omega t - \alpha\omega^{-2}A^2 - (\beta + \alpha\omega^{-2})A^2\sin^2\omega t$ (comp. avec [1], § 28).

11.6. En ramenant la fonction de Hamilton à la forme étudiée au problème 10.4, on obtient $x = Q - \frac{5\beta}{8\omega_0^2}Q^3 - \frac{9\beta}{8\omega_0^4}QP^2$, où $Q = A\cos\omega t$, $P = -\omega_0 A\sin\omega t$, $\omega = \omega_0 + \frac{3\beta}{2\omega_0}A^2$ (comp. avec [1], § 28).

11.7. $H'(P, Q) = H(P, Q)$.

Pour $X = A\sin(\omega t + \varphi)$, $Y = 0$, l'oscillateur effectue un mouvement sur l'ellipse

$$x = A\cos\lambda\sin(\omega t + \varphi),$$
$$y = A\sin\lambda\cos(\omega t + \varphi).$$

11.8. Pour rendre la transcription moins fastidieuse, il convient de poser temporairement $m = \omega = e = c = 1$. Ces facteurs peuvent être aisément rétablis dans les expressions définitives. La transformation du problème (11.7) est une rotation dans le plan xp_y et yp_x, aussi conserve-t-elle l'aspect de la partie de la fonction de Hamilton égale à

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2).$$

Quant à l'adjonction due aux termes $\frac{1}{2}\mathscr{H}^2x^2 - \mathscr{H}xp_y$, elle est égale à

$$\frac{1}{2}\mathscr{H}^2(X^2\cos^2\lambda + P_Y^2\sin^2\lambda + 2XP_Y\sin\lambda\cos\lambda) +$$
$$+ \mathscr{H}(X^2 - P_Y^2)\sin\lambda\cos\lambda - \mathscr{H}(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)XP_Y.$$

Le terme non diagonal XP_Y disparaît si l'on pose

$$\sin^2\lambda - \cos^2\lambda + \mathscr{H}\sin\lambda\cos\lambda = 0,$$

c'est-à-dire $\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2}{\mathscr{H}}$. Après des transformations fort simples la fonction de Hamilton se ramène à la forme

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_X^2 + P_Y^2 \operatorname{cotg}^2 \lambda\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(X^2 \operatorname{tg}^2 \lambda + Y^2\right). \qquad (1)$$

Les variables X, Y effectuent ainsi des oscillations harmoniques de pulsations égales respectivement à

$$\omega_1 = \omega \operatorname{tg} \lambda = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{e\mathscr{H}}{2mc}\right)^2} - \frac{e\mathscr{H}}{2mc},$$

$$\omega_2 = \omega \operatorname{cotg} \lambda = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{e\mathscr{H}}{2mc}\right)^2} + \frac{e\mathscr{H}}{2mc}$$

(comp. avec [2], § 21, problème). Chacune des coordonnées X, Y traduit un mouvement sur l'ellipse ; l'oscillation arbitraire constitue une superposition de deux de ces mouvements (comp. les problèmes 6.36, 11.7).

Il est intéressant que pour $\mathscr{H} \to 0$ il s'avère que $\lambda = \pi/4$ (et non pas $\lambda = 0$). Cela signifie que même pour un champ $\mathscr{H}$ très peu intense, les oscillations « naturelles » sont celles qui sont polarisées suivant le cercle. Quant aux oscillations qui pour $\lambda = 0$ correspondent aux coordonnées X (Y) et qui en l'absence du champ $\mathscr{H}$ seraient linéaires, elles modifient lentement l'orientation de la polarisation avec l'apparition du champ $\mathscr{H}$.

Si le champ magnétique est variable, il faut à la fonction de Hamilton (1) ajouter la dérivée partielle par rapport au temps de la fonction génératrice

$$\Phi = -m\alpha\, xy \operatorname{cotg} \lambda - \frac{P_X P_Y}{m\omega} \operatorname{tg} \lambda + \frac{xP_X + yP_Y}{\cos \lambda}$$

(en l'exprimant en fonction de X, Y, P_X, P_Y) (voir également la note accompagnant la solution du problème 13.25).

11.9. En posant dans la transformation canonique du problème précédent $\omega = \omega_2$, $\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2\omega_{\mathscr{H}}\omega_2}{\omega_{\mathscr{H}}^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}$, il vient

$$H' = \frac{1}{2m}\left(P_X^2 + \frac{\Omega_2^2}{\omega_2^2} P_Y^2 + p_z^2\right) + \frac{m}{2}\left(\Omega_1^2 X^2 + \omega_2^2 Y^2 + \omega_3^2 z^2\right),$$

où $\Omega_{1,2}$ sont définis au problème 6.23.

11.10. La transformation ($\lambda = \pi/4$)

$$q_{s1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_s + \frac{P_{Y_s}}{Nm\omega_s}\right), \quad q_{s2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_s + \frac{P_{X_s}}{Nm\omega_s}\right)$$

conserve l'aspect de la fonction de Hamilton (comp. avec problème 11.7)

$$H=\frac{p_0^2}{2Nm}+\sum_{s=1}^{R}\left[\frac{p_{s1}^2+p_{s2}^2}{2Nm}+\frac{Nm\omega_s^2}{2}(q_{s1}^2+q_{s2}^2)\right]=$$

$$=\frac{p_0^2}{2Nm}+\sum_{s=1}^{R}\left[\frac{P_{X_s}^2+P_{Y_s}^2}{2Nm}+\frac{Nm\omega_s^2}{2}(X_s^2+Y_s^2)\right].$$

L'oscillation répondant à $X_s = A\cos(\omega_s t+\beta)$ est:

$$x_n=\frac{A}{\sqrt{2}}\sin(\omega_s t+n\varphi_s+\beta),$$

tandis que celle correspondant à $Y_s = B\cos(\omega_s t+\beta)$ est

$$x_n=\frac{B}{\sqrt{2}}\sin(-\omega_s t+n\varphi_s-\beta).$$

11.11. La nouvelle fonction de Hamilton est $H' = \omega P_1$. Les équations de mouvement en nouvelles variables prennent la forme

$$\dot{P}_1=\dot{P}_2=\dot{Q}_2=0,\quad \dot{Q}_1=\omega.$$

Comment variera l'aspect de la fonction de Hamilton $\mathcal{H}'$ si $\mathcal{H}$ dépend du temps?

11.12. La transformation proposée $p = \alpha P$, $r = Q/\alpha$ est une transformation par similitude.

11.13. La transformation de jauge $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla f(\mathbf{r},t)$, $\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ peut se ramener à la transformation canonique $\mathbf{r}'=\mathbf{r}$, $\mathbf{P}'=\mathbf{P}-\frac{e}{c}\nabla f$, $H'=H-\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$ en recourant à la fonction génératrice

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{P})=\mathbf{r}\mathbf{P}-\frac{e}{c}f(\mathbf{r},t).$$

11.14. $\Phi(q,P)=qP-f(q,t)$.

11.15. b) $F_\tau(q,Q)=\frac{F\tau}{2}(q+Q)+\frac{m}{2\tau}(q-Q)^2$;

c) $F_\tau(q,Q)=\frac{m\omega}{2\sin\omega\tau}[2qQ-(q^2+Q^2)\cos\omega\tau]$.

11.16. a) $\mathbf{Q}=\mathbf{r}+\delta\mathbf{a}$, $\mathbf{P}=\mathbf{p}$ est un déplacement du système en bloc de $\delta\mathbf{a}$ (ou un déplacement du système de coordonnées de $-\delta\mathbf{a}$).

b) A la précision des infiniment petits du premier ordre inclus près

$$\mathbf{Q}=\mathbf{r}+[\delta\varphi,\mathbf{r}],\quad \mathbf{P}=\mathbf{p}+[\delta\varphi,\mathbf{p}].$$

La transformation est une rotation du système de coordonnées de l'angle $-\delta\varphi$.

c) $Q(t) = q(t + \delta\tau), \quad P(t) = p(t + \delta\tau),$

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t + \delta\tau).$$

La transformation est un déplacement dans le temps de $\delta\tau$ (comp. avec [1], § 45).

d) $\mathbf{Q} = \mathbf{r} + 2\mathbf{p}\delta\alpha, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} - 2\mathbf{r}\delta\alpha.$

La transformation est une rotation de l'angle $2\delta\alpha$ dans chaque paire de plans $x_i p_i$ ($i = 1, 2, 3$) de l'espace de phase.

11.18. a) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \mathbf{nP}\delta\alpha + \mathbf{n}[\mathbf{rP}]\,\delta\varphi$, où $\delta\alpha$ est le déplacement suivant la direction $\mathbf{n}$, tandis que $\delta\varphi = \frac{2\pi}{h}\delta a$ est l'angle de rotation autour de $\mathbf{n}$ (h étant le pas de la vis);

b) $\Phi(r, P, t) = \mathbf{rP} - \mathbf{VP}t + m\mathbf{rV}$;

c) $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{rP} - t\delta\Omega\,[\mathbf{rP}]$.

11.19. $\delta f(q, p) = \lambda\{W, f\}_{p,q}$.

En effet, en reportant les valeurs de nouvelles variables $P = p - \lambda\frac{\partial W}{\partial q}$ et $Q = q + \lambda\frac{\partial W}{\partial P}$ dans $f(Q, P)$ et en développant l'expression obtenue en puissance de λ, on obtient, à la précision jusqu'au premier ordre inclus près,

$$\delta f(q, p) = \lambda\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial W(q, p)}{\partial p} - \lambda\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial W(q, p)}{\partial q}.$$

11.20. En posant dans le problème précédent $\Phi = \mathbf{rP} + \lambda\mathbf{rP}$, on obtient une transformation par similitude avec $\alpha = 1 + \lambda$ (voir problème 11.12). La fonction de Hamilton proposée est telle que $H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \alpha^2 H(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ et, par suite $\lambda\{H, \mathbf{rp}\} = H' - H = 2\lambda H$ ($\lambda \to 0$). D'autre part, $\{H, \mathbf{rp}\} = \frac{d}{dt}(\mathbf{rp})$. D'où $\mathbf{rp} - 2Et = \text{const}$ (comp. avec problème 4.13b).

11.22. Soient $\delta_1 q$ et $\delta_1 p$ *) les variations de coordonnées et d'impulsions liées à la transformation définie par Φ_1. Alors

$$f(q + \delta_1 q, p + \delta_1 p) = \\ = f(q, p) + \lambda_1\{W_1(q, p), f(q, p)\} + \lambda_1^2\varphi_1(q, p). \quad (1)$$

*) Mentionnons, par exemple, la variation de l'impulsion à la précision jusqu'au second ordre près:

$$\delta_1 p = P - p = -\lambda_1\frac{\partial W_1(q, p)}{\partial q} = -\lambda_1\frac{\partial W_1(q, p)}{\partial q} + \lambda_1^2\frac{\partial^2 W_1(q, p)}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial W_1(q, p)}{\partial q}.$$

A chacun des termes du second membre de (1) appliquons ensuite la transformation définie par la fonction Φ_2,

$$f(q+\delta_{21}q,\ p+\delta_{21}p) = f + \lambda_2\{W_2, f\} + \lambda_1\{W_1, f\} + \\ + \lambda_1\lambda_2\{W_2, \{W_1, f\}\} + \lambda_1^2\varphi_1 + \lambda_2^2\varphi_2. \quad (2)$$

La transformation $\lambda_1^2\varphi_1(q, p)$ fournit l'adjonction supérieure au deuxième ordre de petitesse. Le résultat de l'application de cette transformation dans l'ordre inverse

$$f(q+\delta_{12}q,\ p+\delta_{12}p) = f + \lambda_1\{W_1, f\} + \lambda_2\{W_2, f\} + \\ + \lambda_1\lambda_2\{W_1, \{W_2, f\}\} + \lambda_1^2\varphi_1 + \lambda_2^2\varphi_2 \quad (3)$$

ne diffère de (2) que par les termes de second ordre, proportionnels à $\lambda_1\lambda_2$. En ôtant (3) de (2), il vient

$$\lambda_1\lambda_2(\{W_2, \{W_1, f\}\} - \{W_1, \{W_2, f\}\}) = \lambda_1\lambda_2\{f, \{W_1, W_2\}\}.$$

Aussi, en particulier, les déplacements $\lambda W = \delta\mathbf{aP}$ (voir problème 11.16) sont-ils permutables, tandis que les rotations autour d'axes différents $\lambda W = \delta\varphi\,[\mathbf{rP}]$ ne le sont pas.

La proposition inverse de celle formulée au problème est-elle vraie?

11.23. La transformation canonique avec paramètre variable λ peut être assimilée à un « mouvement », où λ joue le rôle de temps, tandis que $W(q, p)$ celui de la fonction de Hamilton (comp. avec problème 11.16 c). Les équations du « mouvement » sont:

$$\frac{dQ}{d\lambda} = \frac{\partial W(Q, P)}{\partial P}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = -\frac{\partial W(Q, P)}{\partial Q}.$$

Ces équations s'obtiennent facilement aussi de façon formelle à partir des résultats du problème 11.19.

a) La variation infiniment petite des coordonnées et des impulsions dans la transformation donnée prend la forme

$$\delta\mathbf{r} = \frac{\lambda}{N}\{W, \mathbf{r}\} = \frac{\lambda}{N}\{\mathbf{Ma}, \mathbf{r}\} = -[\mathbf{n}, \mathbf{r}]\,\delta\varphi,$$

$$\delta\mathbf{p} = -[\mathbf{n}, \mathbf{p}]\,\delta\varphi,$$

où $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{a}$, $\delta\varphi = -\frac{\lambda a}{N}$. Cette transformation est une rotation du système de coordonnées d'angle $\delta\varphi$ autour de la direction $\mathbf{n}$. En dirigeant l'axe z suivant $\mathbf{a}$, on obtient en définitive

$$X = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad Y = y\cos\varphi + x\sin\varphi, \quad Z = z,$$

ainsi que des formules analogues pour les composantes de l'impulsion.

b) La variation infiniment petite des coordonnées et des impulsions dans la transformation canonique définie par A_1 prend la forme

$$\delta x = p_x\delta\varphi, \quad \delta y = -p_y\delta\varphi, \quad \delta p_x = -x\delta\varphi, \quad \delta p_y = y\delta\varphi,$$

où $\delta\varphi = \frac{\lambda}{2N}$. Cette transformation est une rotation d'angle $+\delta\varphi$ dans le plan xp_x et d'angle $-\delta\varphi$ dans le plan yp_y. Donc

$$X = x\cos\varphi + p_x\sin\varphi, \quad Y = y\cos\varphi - p_y\sin\varphi,$$
$$P_X = -x\sin\varphi + p_x\cos\varphi, \quad P_Y = y\sin\varphi + p_y\cos\varphi.$$

De façon analogue, A_2 (A_3) définit la rotation d'angle φ ($-\varphi$) dans les plans xp_y et yp_x (xy et p_xp_y) et A_4, la rotation d'angle 4φ dans les plans xp_x et yp_y.

Toute rotation dans l'espace de phase est loin de constituer une transformation canonique. Par exemple, la rotation dans le plan xp_y n'est pas une transformation canonique.

Il est intéressant de comparer le mouvement d'un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions (la fonction de Hamilton $H = \frac{1}{2}A_4$) avec le mouvement d'une particule dans le plan xy au sein d'un champ quelconque doué d'une symétrie axiale, $U(x^2 + y^2)$. Dans les deux cas les intégrales se réduisent au moment cinétique $2A_3$ dont la persistance est due à l'invariance du système relativement aux rotations autour de l'axe z. En ce qui concerne l'oscillateur, il y a en outre les intégrales de mouvement A_1 et A_2, dont la conservation est liée à la symétrie « discrète », l'invariance de la rotation de Hamilton relativement aux rotations dans l'espace de phase. Sous ce rapport l'oscillateur mime une particule dans un champ central tridimensionnel, possédant trois intégrales de mouvement $M_{x,y,z}$.

La présence d'intégrales de mouvement supplémentaires dans le cas de l'oscillateur implique que le point (x, y, p_x, p_y) se meut dans l'espace de phase sur une ligne fermée, tandis que la trajectoire de la particule au sein du champ $U(x^2 + y^2)$ « remplit » une surface de phase bidimensionnelle (voir [1], § 50).

11.24. a) Dans l'espace du momentum et de phase le volume dégagé ne varie pas dans le temps, tandis que dans l'espace de coordonnées il « s'étale ». C'est ainsi que si à l'instant origine l'état du système est figuré par le rectangle $ABCD$ (fig. 158), au bout du temps t il se transforme en parallélogramme $A'B'C'D'$ ($AD = A'D'$), la distance séparant sur l'axe x A' de C' valant $\Delta x = \Delta x_0 + \frac{\Delta p_0}{m}t$. Avec le temps, ce parallélogramme dégénère en une bande étroite de grande longueur.

b) Si au point $x = L$ est placé un mur, le volume de phase dégagé n'est déjà plus le parallélogramme $A'B'C'D'$ et prend la forme représentée sur la figure 159, a. Avec le temps le volume de phase initial se transforme en une série de bandes parallèles très étroites qui se distribueront de façon presque uniforme à l'intérieur des deux rectangles $0 \leqslant x \leqslant L$, $p_0 \leqslant p \leqslant p_0 + \Delta p_0$ et $0 \leqslant x \leqslant L$, $-p_0 - \Delta p_0 \leqslant p \leqslant -p_0$ (fig. 159, b).

c) La trajectoire de phase d'un oscillateur d'énergie E et de pulsation ω est une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$ aux demi-axes $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, $b = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Tous les points du volume de phase ainsi dégagé évoluent sur de telles ellipses et, après une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, reviennent à l'état initial. Les dimensions du « volume » dégagé en coordonnées Δx et en impulsions Δp vibrent avec la pulsation 2ω. A la différence

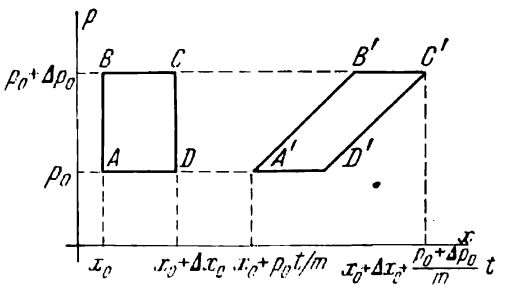


Fig. 158

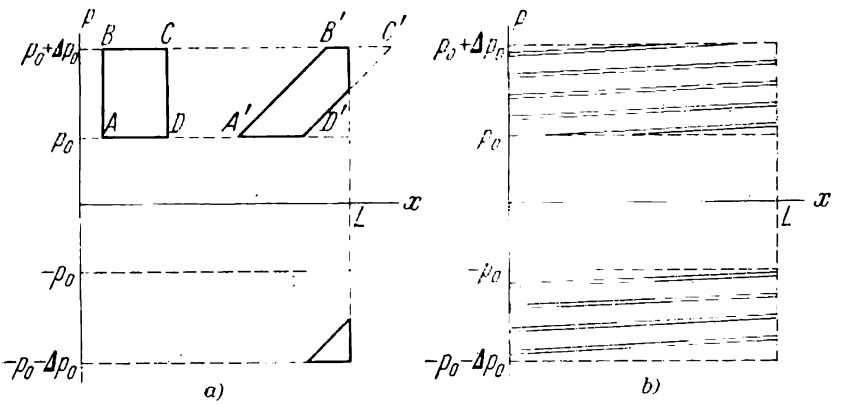


Fig. 159

du point précédent, il ne se produit pas ici d'étalement du volume de phase dégagé suivant tout le domaine de l'espace de phase.

d) Pour un oscillateur avec frottement (la force de frottement $F_{\text{frot}} = -2m\lambda\dot{x}$)

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi),$$

$$p = m\dot{x} = -mae^{-\lambda t}[\omega\sin\omega t + \varphi) + \lambda\cos(\omega t + \varphi)],$$

les oscillations s'amortissant avec le temps, aussi la trajectoire de phase est une spirale

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{p + m\lambda x}{ma\omega}\right)^2 = e^{-2\lambda t}.$$

Le volume de phase dégagé diminue avec le temps jusqu'à zéro. La non-persistance du volume de phase s'explique ici par le fait que le système n'est pas canonique ; pour le décrire complètement, il faut définir non seulement la fonction de Lagrange $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2)$, mais également la fonction dissipative $F = \frac{1}{2} m\lambda \dot{x}^2$ (voir [1], § 25).

Si, par contre, pour le système donné on choisit la « fonction de Lagrange » sous la forme

$$L' = \frac{m}{2} e^{2\lambda t} (\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2)$$

(comp. avec problème 4.17), alors le volume de phase dégagé se conservera pour les variables canoniques correspondantes x et $p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}$, toutefois, dans ce cas l'impulsion généralisée $p' = m\dot{x}e^{2\lambda t}$ n'a plus, comme précédemment, une signification physique simple.

e) Etant donné que dans ce cas la période est fonction de l'énergie, le domaine dégagé de l'espace de phase s'étend dans le temps pour « remplir » en entier la région disponible de l'espace de phase (comp. avec le point b)).

Admettons qu'on a dégagé au début la région $x_0 < x < x_0 + \Delta x$, $p_0 < p < p_0 + \Delta p$. Il est aisé d'apprécier le temps au bout duquel les particules les plus rapides effectueront une oscillation de plus (ou de moins) que les particules les plus lentes :

$$\tau \sim \frac{T^2}{\Delta T}, \quad \Delta T \sim \frac{dT}{dE}\Delta E, \quad \Delta E \sim \frac{p_0 \Delta p}{m} + \left|\frac{dU(x_0)}{dx}\right| \Delta x.$$

f) Soient N particules pour lesquelles les points de l'espace de phase décrivant leur état se distribuent à l'instant origine avec la densité $Nw(x_0, p_0, 0)$ en évoluant suivant les équations

$$x = f(x_0, p_0, t), \qquad (1)$$
$$p = \varphi(x_0, p_0, t).$$

Dans ce cas

$$f(x_0, p_0, t) = x_0 + \frac{p_0}{m} t, \quad \varphi(x_0, p_0, t) = p_0$$

pour un mouvement libre et

$$f(x_0, p_0, t) = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t,$$
$$\varphi(x_0, p_0, t) = -m\omega x_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t$$

pour des oscillateurs harmoniques. Dans ce cas le nombre de particules de la région dégagée de l'espace de phase, dont tous les points

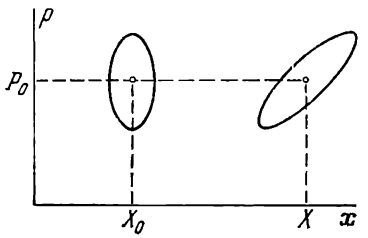


Fig. 160

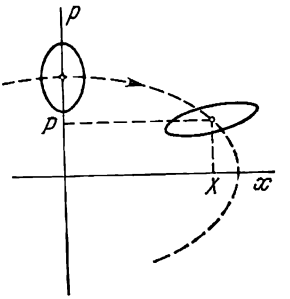


Fig. 161

évoluent suivant la même loi, demeure constant; en particulier, pour un volume de phase infiniment petit $dx\,dp$, on a

$$Nw\,(x,\ p,\ t)\,dx\,dp = Nw\,(x_0,\ p_0,\ 0)\,dx_0 dp_0.$$

Selon le théorème de Liouville (voir [1], § 46) $\frac{\partial\,(x,\ p)}{\partial\,(x_0,\ p_0)} = 1$, donc

$$w\,(x,\ p,\ t) = w\,(x_0,\ p_0,\ 0). \qquad (2)$$

En exprimant x_0 et p_0 sur la base de (1)

$$x_0 = f\,(x,\ p,\ -t), \quad p_0 = \varphi\,(x,\ p,\ -t)$$

et en portant dans (2), il vient

$$w\,(x,\ p,\ t) = w\,(f\,(x,\ p,\ -t),\ \ \varphi\,(x,\ p,\ -t),\ 0),$$

soit

$$w\,(x,\ p,\ t) = \frac{\exp\left[-\alpha\,(x-X)^2 - \beta\,(x-X)\,(p-P) - \gamma\,(p-P)^2\right]}{2\pi\Delta p_0 \Delta x_0},$$

où $X = f\,(X_0,\ P_0,\ t)$, $P = \varphi\,(X_0,\ P_0,\ t)$, tandis que les coefficients α, β, γ des particules libres sont

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta x_0^2}, \quad \beta = -\frac{t}{m\Delta x_0^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2\Delta p_0^2} + \frac{t^2}{2m^2\Delta x_0^2},$$

et pour les oscillateurs

$$\alpha = \frac{\cos^2\omega t}{2\Delta x_0^2} + \frac{m^2\omega^2\sin^2\omega t}{2\Delta p_0^2}, \quad \beta = \frac{\cos^2\omega t}{2\Delta p_0^2} + \frac{\sin^2\omega t}{2m^2\omega^2\Delta x_0^2},$$

$$\gamma = \sin\omega t\cos\omega t\left(\frac{m\omega}{\Delta p_0^2} - \frac{1}{m\omega\Delta x_0^2}\right).$$

Les figures 160, 161 représentent comment évoluent les régions de l'espace de phase pour lesquelles $2\pi\Delta x_0\Delta p_0\ \ w\,(x,\ p,\ t) \geqslant \frac{1}{2}$ (pour

les particules libres et les oscillateurs respectivement). Ces régions sont des ellipses qui se déforment dans le temps *). Leurs centres se déplacent suivant la même loi (1) que les particules. En cas de mouvement libre cette ellipse s'étend indéfiniment, au cas d'oscillateurs elle ne fait que pulser. Remarquons que les distributions en coordonnées et en impulsions ne sont déjà plus indépendantes, ($w(x, p, t)$ ne se sépare plus en deux facteurs de l'aspect $w_1(x, t)\, w_2(p, t)$).

Il serait intéressant d'étudier la fonction de distribution en coordonnées (indépendamment des valeurs de l'impulsion)

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, p, t)\, dp$$

et en impulsions

$$\tilde{w}(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, p, t)\, dx.$$

Ces distributions s'avèrent être celles de Gauss avec maximums en X et P respectivement:

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta x}\, e^{-\frac{(x-X)^2}{2\Delta x^2}},$$

$$\tilde{w}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta p}\, e^{-\frac{(p-P)^2}{2\Delta p^2}},$$

où pour un mouvement libre

$$\Delta x^2 = \Delta x_0^2 + \frac{\Delta p_0^2}{m^2}\, t^2, \quad \Delta p^2 = \Delta p_0^2,$$

et pour les oscillateurs

$$\Delta x^2 = \Delta x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{\Delta p_0^2}{m^2\omega^2} \sin^2 \omega t,$$

$$\Delta p^2 = \Delta p_0^2 \cos^2 \omega t + m^2\omega^2 \Delta x_0^2 \sin^2 \omega t.$$

11.25. a) $\{a^*, a\} = -i$, $H_0 = \omega a^* a$.

b) Les variables P et Q sont canoniques, vu que $\{P, Q\} = 1$. De l'égalité $dF = p(x, Q)\, dx - P(x, Q)\, dQ$ se déduit la fonction génératrice

$$F(x, Q, t) = \frac{i}{2} m\omega x^2 + \frac{i}{2} Q^2 e^{-2i\omega t} - i\sqrt{2m\omega}\, x Q e^{-i\omega t}.$$

*) Si les échelles suivant les axes p et x sont choisies dans l'espace de phase des oscillateurs harmoniques de manière que $m\omega = 1$, les trajectoires des phases constituent des cercles, tandis que le domaine isolé de l'espace de phase est mis en rotation autour de l'origine des coordonnées sans se déformer.

La nouvelle fonction de Hamilton

$$H_0'(Q, P) = H_0 + \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial t} = 0.$$

c) En dégageant de

$$x^4 = \left(\frac{Qe^{-i\omega t} - iPe^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\right)^4$$

le terme $-3Q^2P^2/2m^2\omega^2$ qui ne contient pas le temps, on obtient l'expression moyenne de la fonction de Hamilton

$$\langle H'(Q, P)\rangle = -\frac{3\beta}{8m\omega^2} Q^2P^2.$$

Dans la suite, les crochets angulaires $\langle\ \rangle$, désignant l'effet de moyenne, sont négligés.

Il est évident que $-iQP = |Q_0|^2 = |a|^2$ est une intégrale de mouvement.

Les équations de Hamilton

$$\dot{Q} = -i\varepsilon Q, \quad \dot{P} = i\varepsilon P, \quad \varepsilon = \frac{3\beta|Q_0|^2}{4m\omega^2},$$

d'où

$$Q = Q_0 e^{-i\varepsilon t}, \quad P = iQ_0^* e^{i\varepsilon t},$$

de sorte que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(Q_0 e^{-i\omega' t} + Q_0^* e^{i\omega' t}) = x_0 \cos(\omega' t + \varphi).$$

L'influence de l'adjonction δU se réduit à une variation de la pulsation

$$\omega' = \omega + \frac{3\beta|Q_0|^2}{4m\omega^2} = \omega + \frac{3\beta x_0^2}{8\omega}$$

(comp. avec problème 8.1).

d) La nouvelle fonction de Hamilton

$$H''(Q, \mathcal{P}, t) = m^2\omega^2\alpha\left(\frac{Qe^{-i\omega t} - iPe^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\right)^4 \frac{e^{4i\omega t} + e^{-4i\omega t}}{2}$$

une fois la moyenne prise se réduit à

$$\langle H'(Q, P)\rangle = \frac{\alpha}{8}(Q^4 + P^4).$$

Pour la variable $\xi = -iQP = |a|^2$, proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations, l'équation du mouvement est

$$\dot{\xi} = \{\langle H'\rangle, \xi\} = -\frac{i\alpha}{2}(P^4 - Q^4).$$

Compte tenu de

$$\frac{\alpha}{4}(Q^4+P^4)=A=\text{const},$$

on obtient

$$\dot{\xi}^2=-4A^2+\alpha^2\xi^4.$$

Donc ξ varie comme la coordonnée de la particule (de masse égale à l'unité) plongée dans le champ $V(\xi)=-\frac{\alpha^2}{2}\xi^4$ et dont l'énergie est $-2A^2$ (comp. avec problème 1.2). En un temps fini l'amplitude croît jusqu'à une grandeur infinie (croissance dite explosive de l'amplitude).

Il va de soi que l'utilisation de la valeur moyenne de la fonction de Hamilton n'est justifiable que pour $\dot{\xi}\ll\omega\xi$, c'est-à-dire pour $\xi\ll\omega/\alpha$.

11.26. Introduisant les nouvelles variables

$$a=\frac{m\omega x+ip_x}{\sqrt{2m\omega}}\,e^{i\omega t},$$

$$b=\frac{m\omega_2 y+ip_y}{\sqrt{2m\omega_2}}\,e^{i\omega_2 t},$$

$$c=\frac{m\omega_3 z+ip_z}{\sqrt{2m\omega_3}}\,e^{i\omega_3 t},$$

($\omega=\omega_2+\omega_3$) et les impulsions canoniques conjuguées ia^*, ib^*, ic^*. La nouvelle fonction de Hamilton dont on a pris la moyenne sur la période $2\pi/\omega_{2,3}$ est :

$$\langle H'\rangle=\varepsilon\,|a\,|^2+\eta\,(a^*bc+ab^*c^*),$$

$$\varepsilon=\omega_1-\omega,\quad \eta=\frac{\alpha}{4\sqrt{2m\omega\omega_2\omega_3}}.$$

Les équations de mouvement

$$\dot{a}=-i\varepsilon a-i\eta bc,$$

$$\dot{b}=-i\eta ac^*,$$

$$\dot{c}=-i\eta ab^*$$

possèdent des intégrales *)

$$\langle H'\rangle=A,\quad |\,a\,|^2+|\,b\,|^2=B,\quad |\,a\,|^2+|\,c\,|^2=C.$$

*) Les intégrales B et C sont appelées intégrales de Manly-Row.

L'équation

$$\frac{d}{dt} \mid a \mid^2 = i\eta\,(ab^*c^* - a^*bc)$$

peut être représentée sous une forme commode à l'étude qualitative

$$\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0,$$

où $\xi = \mid a \mid^2$,

$$V(\xi) = (A - \varepsilon\xi)^2 - 4\eta^2\xi\,(B - \xi)\,(C - \xi).$$

A l'instant origine $c = 0$, par suite, $A = \varepsilon C$, $B < C$ et

$$V(\xi) = (C - \xi)^2(\varepsilon^2 - 4\xi) - 4\eta^2\xi\,(C - B)\,(C - \xi).$$

Sur la figure 162, *a* et *b* on a donné les graphiques de $V(\xi)$ pour les cas de $\varepsilon^2 < 4\eta^2 C$ et $\varepsilon^2 > 4\eta^2 C$.

Dans le premier cas ξ subit des oscillations et il se produit des battements. L'énergie est périodiquement transmise de l'oscillateur x

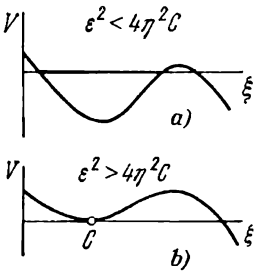


Fig. 162

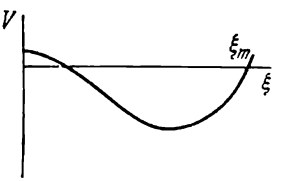


Fig. 163

aux oscillateurs y, z et inversement. Dans le second cas (c'est-à-dire pour un important « désaccord » ε et des amplitudes initiales faibles) les oscillations y et z ne sont pas amorcées.

Pour plus de détails voir [22].

11.27. a) $\langle H' \rangle = \varepsilon \mid a \mid^2 + \mu \mid a \mid^4 + \eta\,(a^2 + a^{*2})$, où

$$\varepsilon = \omega - \gamma, \quad \mu = \frac{3\beta}{8m\omega^2}, \quad \eta = \frac{\hbar\omega}{8}.$$

b) Les équations de mouvement

$$-\dot{a} = i\,(\varepsilon + 2\mu \mid a \mid^2)\,a + 2i\eta a^*,$$

$$\dot{a}^* = i\,(\varepsilon + 2\mu \mid a \mid^2)\,a^* + 2i\eta a$$

possèdent des solutions constantes

$$a_0 = 0, \quad |a_1|^2 = \frac{2\eta - \varepsilon}{2\mu}.$$

Pour $\xi = |a|^2$ on obtient l'équation

$$\dot{\xi} = -2i\eta\,(a^{*2} - a^2).$$

Compte tenu de ce que $\langle H' \rangle = \varepsilon\xi + \mu\xi^2 + \eta\,(a_2 + a^{*2}) = C = \text{const}$, il vient

$$\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0,$$

où $V(\xi) = 4\eta^2\,[(a^{*2} + a^2)^2 - 4\,|a|^4] = 4\,(C - \varepsilon\xi - \mu\xi^2)^2 - 16\eta^2\xi^2$. Dans le cas qui nous intéresse, selon les conditions initiales, la quantité C est petite. Dans la région de résonance $|\xi| < 2\eta$ le graphique de $V(\xi)$ (fig. 163) permet de noter que ξ subit des oscillations dans l'intervalle de zéro à $\xi_m \approx 2\,|a_1|^2$.

Donc le passage au régime d'oscillations permanentes de $\xi = |a_1|^2$ (comp. avec problème 8.7) ne peut être assuré que par un certain mécanisme dont on n'a pas tenu compte, par exemple, le frottement, et se prolonger assez longtemps. Soulignons que ce phénomène de transition est de la nature des battements et a lieu même au cas d'un « désaccord » nul, $\varepsilon = 0$, se distinguant ainsi du phénomène transitoire des oscillations linéaires (voir problème 5.11).

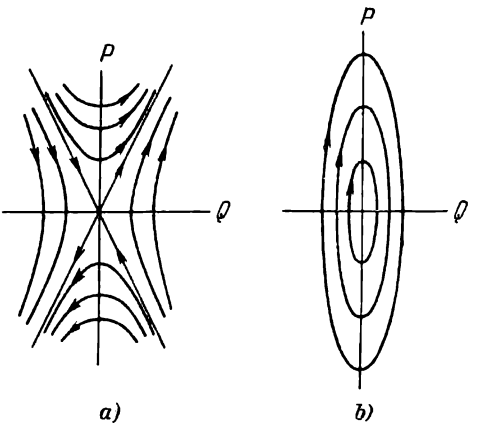


Fig. 164

11.28. L'expression moyenne de la fonction de Hamilton

$$\langle H'(Q, P, t)\rangle = H'(Q, P) = \frac{m\omega^2}{2}\left(\varepsilon - \frac{h}{2}\right)Q^2 + \frac{1}{2m}\left(\varepsilon + \frac{h}{2}\right)P^2.$$

La quantité $\sqrt{Q^2 + P^2/m^2\omega^2}$ est l'amplitude d'oscillation. Les variables Q et P varient peu durant la période $2\pi/\gamma$. Cela s'ensuit immédiatement des équations de Hamilton dont les paramètres ε et h sont petits.

Sur le plan Q, P le point représentant l'état du système se meut suivant la ligne $H'(Q, P) = C = \text{const}$. La figure 164, *a* et *b* fournit une famille de ces lignes pour le domaine de résonance paramétrique $|\varepsilon| < h/2$ et son voisinage $|\varepsilon| > h/2$. Dans le premier cas l'amplitude croît, en fin de compte, indéfiniment, dans le second, elle est soumise à des battements (comp. avec problème 8.8).

§ 12. Équation de Hamilton-Jacobi

12.2. Il est évident que la trajectoire est une courbe plane. Les variables de l'équation de Hamilton-Jacobi se séparent si l'on a recours aux coordonnées polaires dont l'axe polaire z est dirigé suivant **a**. L'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi est

$$S = -Et \pm \int \sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}\, d\theta \pm \int \sqrt{2mE - \beta/r^2}\, dr. \qquad (1)$$

Pour préciser les signes de (1), profitons des relations

$$p_r = m\dot{r} = \frac{\partial S}{\partial r} \pm \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r^2}}, \qquad (2)$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \frac{\partial S}{\partial \theta} \pm \sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}. \qquad (3)$$

Sur le tronçon initial de la trajectoire $\dot{r} < 0$, $\dot{\theta} > 0$ (on suppose que la trajectoire passe au-dessus de l'axe z, fig. 165). Aussi devant le premier radical de (1) doit-on conserver le signe inférieur, tandis que devant le second, le signe supérieur. L'égalité $\frac{\partial S}{\partial \beta} = B$ est l'équation de la trajectoire

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}} + \int_\infty^r \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}} = B. \qquad (4)$$

Les bornes inférieures des intégrales peuvent être choisies quelconques tant que n'est pas déterminée la constante B. Avec le choix fait, à partir de la condition $\theta \to 0$ pour $r \to \infty$, il faut que $B = 0$.

La constante β est l'intégrale de mouvement du problème donné et, en partant de (3), il vient $\beta = p_\theta^2 + 2ma\cos\theta$. Elle s'exprime en fonction des paramètres de la particule pour $r \to \infty$ et $\theta \to 0$, c'est-à-dire jusqu'au choc, quand $p_\theta = mv\rho$ (ρ étant le paramètre d'impact), $\beta = 2m(E\rho^2 + a)$.

Avec la variation de r de ∞ à $r_m = \sqrt{\frac{\beta}{2mE}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{a}{E}}$, défini par la condition $p_r = 0$, θ varie de zéro à θ_m tel que

$$\int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}} + \int_\infty^{r_m} \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}} = 0. \qquad (5)$$

L'accroissement subséquent de θ s'accompagne de l'augmentation de r. Dans ce cas p_r change de signe. L'équation du tronçon LM de la trajectoire est

$$\int_{\theta_m}^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}} - \int_{r_m}^r \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}} = 0. \qquad (6)$$

Il est commode de récrire en additionnant (5) et (6) :

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}} - \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}} - \int_{r_m}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}} = 0. \qquad (7)$$

Pour $r \to \infty$ la trajectoire se rapproche asymptotiquement de la droite parallèle à ON. L'angle $\theta_{\max}$ peut être obtenu de l'égalité

$$\int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}} = 2\int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \qquad (8)$$

L'égalité $\frac{\partial S}{\partial E} = A$ détermine la dépendance $r(t)$. En choisissant A de manière que $r(0) = r_m$, il vient

$$r = \sqrt{v^2t^2 + r_m^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{a}{E} + v^2t^2}. \qquad (9)$$

L'intégrale en r dans (4) et (7) se calcule de façon élémentaire, tandis que celle par rapport à θ se réduit à l'intégrale elliptique.

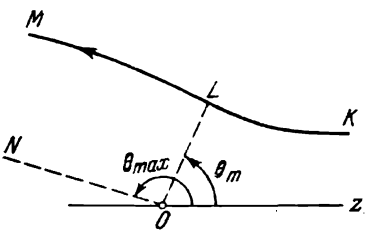


Fig. 165

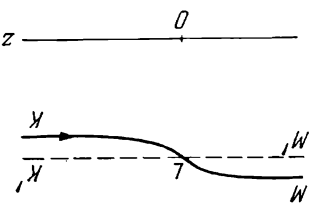


Fig. 166

Pour $E\rho^2 \gg a$ on peut développer l'expression sous l'intégrale dans (4) et (7) en puissances $\frac{2ma}{\beta} \approx \frac{a}{E\rho^2}$. A la précision du premier ordre près

$$r\sin\theta = r_m\left(1 - \frac{a}{2E\rho^2}\cos\theta\right) \qquad (10)$$

(fig. 166).

Dans cette approximation l'angle d'inclinaison de la vitesse de la particule après diffusion est nul. La raison en est dans le fait que l'action de la force sur les différents tronçons de la trajectoire (en approximation zéro c'est la droite $K'M'$) est partielle, tandis qu'en première approximation elle est totalement compensée.

12.3. a) Pour déterminer l'angle d'inclinaison de la particule, il faut développer en $a/E\rho^2$ dans (8) du problème 12.2 jusqu'au se-

cond ordre. On obtient l'équation

$$\theta_{\max}+\frac{ma}{\beta}\sin\theta_{\max}+\frac{3}{4}\left(\frac{ma}{\beta}\right)^2\left(\theta_{\max}+\frac{1}{2}\sin 2\theta_{\max}\right)=\pi. \qquad (1)$$

En résolvant cette équation à la précision allant jusqu'à $\left(\frac{ma}{\beta}\right)^2$, on obtient *) l'angle d'inclinaison

$$\chi=\pi-\theta_{\max}=\frac{3}{4}\pi\left(\frac{ma}{\beta}\right)^2=3\pi\left(\frac{a}{4E\rho^2}\right)^2. \qquad (2)$$

La section de diffusion est

$$d\sigma=\pi|d\rho^2|=\frac{\sqrt{3\pi}a\,do}{16E\chi^{5/2}}. \qquad (3)$$

La dépendance de χ s'avère la même que dans le cas de diffusion sur de petits angles dans le champ γ/r^4, qui décroît beaucoup plus vite que U (r).

b) $d\sigma=\frac{\pi b\,do}{8E\chi^3}$.

c) Au cas de $E\rho^2 \ll |b(\theta)|$, on obtient pour tous les θ au lieu de (10) du problème 12.2, à la précision du second ordre près

$$\theta=\frac{m}{\beta}\int_0^\theta b(\theta)\,d\theta+\frac{3}{2}\frac{m^2}{\beta^2}\int_0^\theta b^2(\theta)\,d\theta=$$

$$=\begin{cases}\arcsin\frac{r_m}{r} & \text{pour } 0<\theta<\theta_m,\\ \pi-\arcsin\frac{r_m}{r} & \text{pour } \theta_m<\theta<\theta_{\max}.\end{cases}$$

Si $\int_0^\pi b(\theta)\,d\theta=\pi\langle b\rangle\neq 0$, alors $d\sigma=\frac{\pi\langle b\rangle}{4E\chi^3}\,do$.

Si, par contre, $\langle b\rangle=0$, alors $d\sigma=\frac{\sqrt{3\pi}}{8E\chi^{5/2}}\sqrt{\frac{\langle b^2\rangle}{2}}\,do$.

12.4. a) Les variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi se séparent si l'on choisit des coordonnées sphériques d'axe z parallèle à

---

*) Cherchons $\theta_{\max}$ sous forme de $\theta_{\max}=\theta_0+\theta_1+\theta_2+\ldots$, où $\theta_1\sim\left(\frac{ma}{\beta}\right)\theta_0$. L'équation (1) dans l'approximation zéro donne $\theta_0=\pi$; en première approximation $\theta_1+\left(\frac{ma}{\beta}\right)\sin\theta_0=0$, d'où $\theta_1=0$; en seconde approximation

$$\theta_2+\frac{ma}{\beta}\theta_1\cos\theta_0+\frac{3}{4}\left(\frac{ma}{\beta}\right)^2\left(\theta_0+\frac{1}{2}\sin 2\theta_0\right)=0,$$

d'où s'ensuit (2).

a. Les impulsions généralisées sont :

$$p_r = m\dot{r} = -\sqrt{2mE - \beta/r^2},$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \pm\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta - p_\varphi^2/\sin^2\theta}, \tag{1}$$

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{const}.$$

La constante $\beta = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} + 2ma\cos\theta$ s'obtient facilement en notant que $p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = M^2$, où M est le moment complet de la particule ; il est commode de le calculer pour $r \to \infty$, $\theta \to \pi - \alpha$ (α étant l'angle entre $\mathbf{v}_\infty$ et $\mathbf{a}$), c'est-à-dire avant la collision. Selon (1), la chute au centre n'est possible qu'à la condition que $\beta < 0$ ou

$$\rho^2 < (a/E)\cos\alpha. \tag{2}$$

Donc la chute est possible si $\alpha < \pi/2$; dans ce cas la section de chute $\sigma = (\pi a/E)\cos\alpha$. La moyenne sur les directions probables de a est $\langle\sigma\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\pi a}{E}\cos\alpha\cdot 2\pi\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\pi a}{4E}$. Il est intéressant que l'élément d'aire défini par la condition (2) soit un cercle dont le centre se trouve sur l'axe du faisceau de particules (bien que le champ ne soit pas symétrique par rapport à cet axe).

12.5. $$\sigma = \begin{cases} \pi R^2 + \frac{\pi a}{E}\cos\alpha, & a\cos\alpha > -ER^2, \\ 0, & a\cos\alpha < -ER^2, \end{cases}$$

où α est l'angle entre $\mathbf{v}_\infty$ et $\mathbf{a}$.

12.6. a) Utilisons les mêmes notations que dans le problème 12.2. L'équation du tronçon initial de la trajectoire ($r \to \infty$, $\theta \to \pi$) est :

$$\int_\theta^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}} = \int_r^\infty \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}}, \tag{1}$$

de plus

$$\beta = 2m(E\rho^2 - a). \tag{2}$$

Dans le cas de $\beta > 0$ l'angle θ décroît avec la variation de r de ∞ à r_m, avec accroissement subséquent jusqu'à ∞. L'équation du tronçon de trajectoire après la traversée de la distance minimale du centre est

$$\int_\theta^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} + \int_{r_m}^r \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}}. \tag{3}$$

Il est évident que pour $E\rho^2 \gg a$ l'équation de la trajectoire (1) et (3) coïncide avec celle de (11) du problème 12.2.

Pour $\beta < 0$ la chute au centre du champ est possible (notons que selon (2) ne sont acceptables que les valeurs de $\beta \geqslant -2ma$). Dans ce cas r décroît de façon monotone de ∞ à 0. L'angle θ diminue de

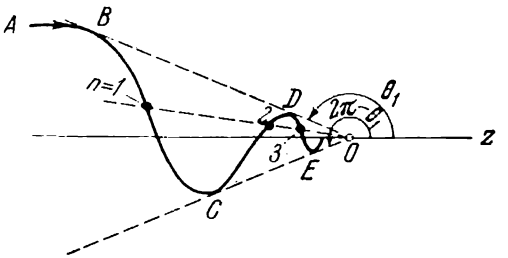


Fig. 167

π à θ_1 pour lequel p_θ devient nul (tronçon AB de la trajectoire; fig. 167). De plus, $\beta - 2ma \cos\theta_1 = 0$. Ensuite, l'angle croît jusqu'à $2\pi - \theta_1$ (tronçon BC de la trajectoire)

$$\int_r^\infty \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE-\beta r^{-2}}} = \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta-2ma\cos\theta}} + \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta-2ma\cos\theta}}. \qquad (4)$$

Au point C l'impulsion p_θ change de nouveau de signe et θ diminue jusqu'à la valeur de θ_1 au point D, puis croît de nouveau, etc.

L'équation de la trajectoire entière peut s'écrire sous la forme

$$\int_r^\infty \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE-\beta r^{-2}}} = (-1)^n \int_\theta^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta-2ma\cos\theta}} + 2n\int_{\theta_1}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta-2ma\cos\theta}} \qquad (5)$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

A une valeur de θ ($\theta_1 < \theta < 2\pi - \theta_1$) correspond une infinité de valeurs de r (n peut prendre toute valeur entière non négative, car l'intégrale du premier membre de (5) pour $r \to 0$ s'accroît indéfiniment). Donc la particule effectue un nombre infini d'oscillations entre les droites BD et CE avant de chuter au centre.

Au cas de petits paramètres d'impact $E\rho^2 \ll a$, on a $\pi - \theta \ll 1$, de sorte que dans (5) on peut à $\cos\theta$ substituer $-1 + \frac{1}{2}(\pi - \theta)^2$.

Et il vient alors *)

$$\theta = \pi - \rho \sqrt{\frac{2E}{a}} \sin\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arsh}\left(\frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{E}}\right)\right]. \qquad (6)$$

La loi de mouvement $r(t)$ se définit de la même façon qu'au problème 12.2. Si $\beta > 0$, c'est la loi définie par la formule (9) du problème 12.2 qui s'applique. Si $\beta < 0$, on a alors

$$r(t) = v\sqrt{t^2 - \tau^2}, \quad v = \sqrt{2E/m}, \quad -\infty < t < \tau = \sqrt{|\beta|}/2E, \qquad (7)$$

la chute s'effectuant à l'instant de temps τ.

b) Si $\beta > 0$ $(E\rho^2 > a)$, il vient

$$\int_{\theta}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{2ma}{\beta}(1 + \sin\theta)}} = \begin{cases} \arcsin\frac{r_m}{r}, & \theta_m < \theta < \pi, \\ \pi - \arcsin\frac{r_m}{r}, & \theta_{\min} < \theta < \theta_m. \end{cases}$$

Si $\beta < 0$ $(E\rho^2 < a)$, il vient

$$\left(\int_{\theta_1}^{\pi} \pm \int_{\theta_1}^{\theta} + 2l \int_{\theta_1}^{\theta_2}\right) \frac{d\theta}{\sqrt{\beta + 2ma(1 + \sin\theta)}} = \int_{r}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{2mE - \beta/r^2}},$$

où l est le nombre d'oscillations complètes sur l'angle (de θ_1 à θ_2 et inversement) accomplies par la particule, les signes $(\pm)$ corres-

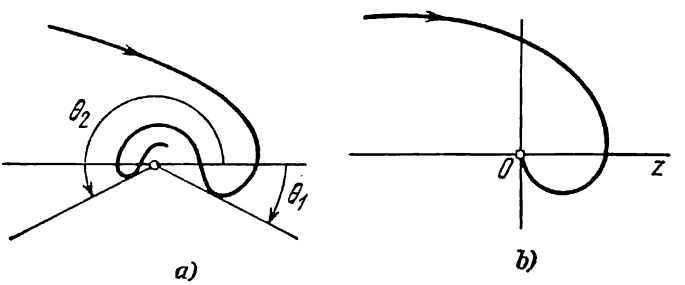


Fig. 168

pondant aux mouvements à l'encontre (ou suivant) les aiguilles d'une montre (fig. 168, *a*)

$$\theta_1 = -\arcsin\frac{E\rho^2}{a}, \quad \theta_2 = \pi + \arcsin\frac{E\rho^2}{a^2}.$$

*) $\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

Si $\beta = 0$ $(E\rho^2 = a)$,

$$r = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi - \theta}{4}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

La particule se meut sur la trajectoire de la figure 168, *b*, la loi de mouvement étant $r = -\sqrt{\frac{2E}{m}}\, t$ ($t < 0$, la chute s'effectuant pour $t = 0$).

12.7. Pour l'intégrale complète de l'équation Hamilton-Jacobi voir [1], § 48. Les impulsions généralisées sont celles du problème 12.4a. La chute au centre est possible si $\beta = 2m\,(E\rho^2 - a\cos\alpha) < 0$ (condition notoirement remplie pour $\alpha^2 < 2E\rho^2/\alpha \ll 1$).

Les équations de la trajectoire

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi\, d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{\beta - 2ma\cos\theta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}}, \tag{1}$$

$$r = \mp r_0 \operatorname{sh} \int \frac{\sqrt{|\beta|}\, d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}}, \tag{2}$$

$$r_0^2 = |\beta|/2mE$$

ne peuvent dans le cas général donner, après intégration, des fonctions élémentaires. Toutefois la description qualitative s'obtient aisément en remarquant que l'équation (1) reliant mutuellement les angles θ et φ, à la précision des notations près, coïncide avec l'équation de la trajectoire d'un pendule sphérique (voir [1], § 14, problème 1). Aussi la particule se meut-elle de manière que le point d'intersection de son rayon vecteur avec la surface de la sphère de rayon l décrive une courbe identique à celle du pendule sphérique de longueur l, d'énergie valant $\frac{\beta}{2ml^2}$ et de moment cinétique p_φ plongé dans le champ de gravité $g = -\frac{a}{ml^3}$. Cette courbe s'insère entre deux cercles « parallèles » de la sphère $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$.

Au cas où $\alpha^2 < 2E\rho^2/\alpha \ll 1$ les équations (1) et (2) sont facilement intégrables

$$\theta = \pi - \sqrt{\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{2}\right)\cos\left(2\sqrt{\frac{ma}{|\beta|}}\operatorname{Arsh}\frac{r_0}{r}\right) + \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2}},$$

$$\theta = \pi - \frac{2\alpha\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon + \alpha^2 + (2\varepsilon - \alpha^2)\cos 2\varphi}}, \quad \varepsilon = \frac{E\rho^2}{a}. \tag{3}$$

Il découle de (3) que la particule, en chutant au centre, se meut entre deux surfaces coniques $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ en pivotant autour de l'axe z,

une rotation complète autour de l'axe z correspondant à deux oscillations complètes d'angle θ. Pour un pendule sphérique, la trajectoire est fermée dans cette approximation (constitue une ellipse).

12.8. a) L'équation de la trajectoire d'un mouvement fini (en l'absence de chute au centre)

$$p/r = 1 + e \cos f(\theta), \tag{1}$$

où

$$p = \frac{\beta}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E\beta}{m\alpha^2}}, \quad f(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2ma}{\beta}\cos\theta}},$$

les constantes E et β satisfaisant aux inégalités $E < 0$, $\beta > 0$.

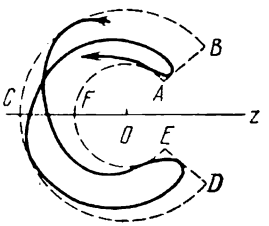


Fig. 169

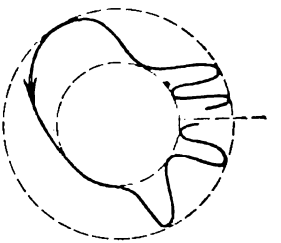


Fig. 170

Si $0 < \beta < 2ma$, l'orbite « remplit » la région $ABCDEF$ (fig. 169) : $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $r_{1,2} = \frac{p}{1 \pm e}$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\theta_1 = \arcsin \frac{\beta}{2ma}$, $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, c'est-à-dire se rapproche aussi près que l'on veut de tout point de cette région.

Si $\beta = 2ma$,

$$f(\theta) = \sqrt{2} \ln \operatorname{tg}(\theta/4) + C_1 \tag{2}$$

et la trajectoire se place à l'intérieur de l'anneau $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ (fig. 170)

Si $\beta > 2ma$, la trajectoire remplit l'anneau $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. En particulier, si $\beta \gg 2ma$,

$$f(\theta) = \theta + \zeta \sin\theta + \frac{3}{4}\zeta^2\theta + \frac{3}{8}\zeta^2 + C_2, \tag{3}$$

où $\zeta = ma/\beta$. C'est une ellipse en précession faiblement déformée, dont la déformation est fonction de son orientation. L'équation (3) est applicable également dans le cas de $\theta \gtrsim \zeta^{-2}$. Il est intéressant de comparer ce résultat avec celui du problème 2.24.

12.10. Les variables de l'équation de Hamilton-Jacobi se séparent si l'on fait passer l'axe z suivant le vecteur **a** (voir [1], § 48, formule

(48.9)). Le mouvement suivant le rayon $t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{2mr^2}}}$ pour $\beta \geqslant 0$ est le même que celui d'une particule dans un champ coulombien $-\alpha/r$ de moment β et d'énergie E. Pour $\beta < 0$ la particule chute au centre. Les équations de la trajectoire sont : $\frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \text{const}$, $\frac{\partial S}{\partial \beta} = \text{const}$. La première de ces dernières

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi \, d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{\beta - 2ma\cos\theta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}}}$$

coïncide avec l'équation de la trajectoire d'un pendule sphérique d'énergie $\beta/2ml^2$ et de moment $M_z = p_\varphi$ dans un champ de gravité $g = -a/ml^3$ (voir [1], § 14, problème 1). La seconde équation établit la relation entre r et θ. L'analyse de cette équation peut également se faire en recourant à l'analogie du pendule sphérique.

12.11. a) $|M_z| < \sqrt{mb/2}$.

b) Le mouvement fini est possible pour un M_z quelconque.

12.12. b) L'intégrale complète de Hamilton-Jacobi (voir [1], § 48, problème 1) est

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int p_\xi(\xi)\, d\xi + \int p_\eta(\eta)\, d\eta,$$

où

$$p_\xi = \pm \sqrt{\frac{m}{2}(E - U_\xi(\xi))}, \quad U_\xi(\xi) = \frac{p_\varphi^2}{2m\xi^2} - \frac{m\alpha + \beta}{m\xi} - \frac{F}{2}\xi,$$

$$p_\eta = \pm \sqrt{\frac{m}{2}(E - U_\eta(\eta))}, \quad U_\eta(\eta) = \frac{p_\varphi^2}{2m\eta^2} - \frac{m\alpha - \beta}{m\eta} + \frac{F}{2}\eta.$$

La trajectoire et la loi de mouvement se déterminent par les équations

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = B, \quad \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = C, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = A,$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{d\xi}{\xi p_\xi(\xi)} - \int \frac{d\eta}{\eta p_\eta(\eta)} = B, \quad \varphi - \frac{p_\varphi}{2}\int \frac{d\xi}{\xi^2 p_\xi(\xi)} - \frac{p_\varphi}{2}\int \frac{d\eta}{\eta^2 p_\eta(\eta)} = C,$$

$$-t + \frac{m}{4}\int \frac{d\xi}{p_\xi(\xi)} + \frac{m}{4}\int \frac{d\eta}{p_\eta(\eta)} = A. \qquad (1)$$

Pour l'étude de la nature du mouvement il est nécessaire de fixer les régions des valeurs admissibles de ξ et η pour E, p_φ, β donnés.

La figure 171 fournit les graphiques des énergies potentielles efficaces $U_\xi(\xi)$ et $U_\eta(\eta)$.

Si $F = 0$, pour $-m\alpha < \beta < m\alpha$ (voir courbes a) et $E < 0$ le mouvement en ξ comme en η est fini, pour $E > 0$, ce dernier est infini. Avec l'apparition d'une petite force $F > 0$ le graphique

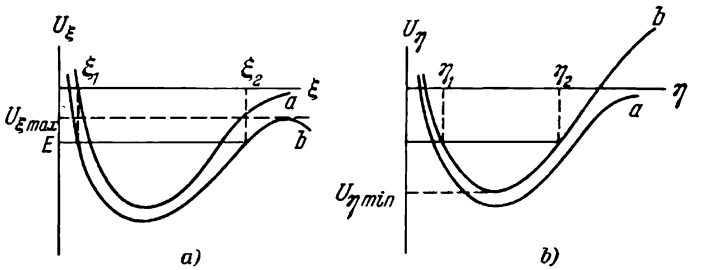


Fig. 171

$U_\xi(\xi)$ atteste un maximum (voir courbes b); au cas de $U_{\eta\min} < E < U_{\xi\max}$ le mouvement continue à demeurer fini. Dans le « plan ρz » le mouvement est limité par le domaine $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$,

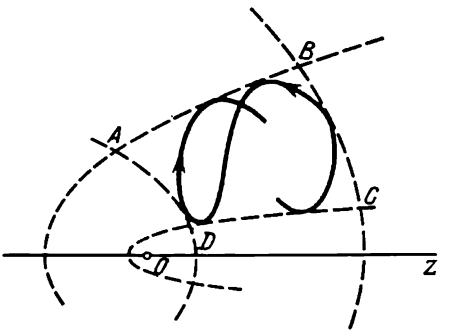


Fig. 172

$\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ (fig. 172); quant au plan ρz, il pivote autour de l'axe z à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. La trajectoire remplit la région de l'espace engendrée par la rotation de la figure $ABCD$ autour de l'axe z (voir aussi problème 2.36). Pour $U_{\xi\max} < E$ le mouvement est infini.

Avec l'accroissement de F la grandeur $U_{\xi\max}$ diminue, tandis que $U_{\eta\min}$ augmente. Quand il s'avérera que $U_{\xi\max} < U_{\eta\min}$, le mouvement fini devient impossible (pour $\beta < -m\alpha + \frac{3}{2}(Fmp_\varphi^4)^{1/3}$ les extrémums de $U_\xi(\xi)$ disparaissent en général).

12.13. En coordonnées elliptiques, $\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$, $z = \sigma\xi\eta$, $\sigma = \sqrt{b^2-a^2}$, le potentiel

$$U = \begin{cases} \infty & \text{pour } \xi > \xi_0 = b/\sigma, \\ 0 & \text{pour } \xi < \xi_0 \end{cases}$$

ne dépend que de ξ et les variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi se séparent (voir [1], § 48).

Le domaine des valeurs inaccessibles de η se définit par la condition

$$2m\sigma^2 E - \beta/(1-\eta^2) < 0 \quad \text{ou} \quad |\eta| > |\cos\alpha|.$$

Bref, le mouvement s'effectue dans la région $|\eta| < |\cos\alpha|$, $1 < \xi < \xi_0$ (domaine hachuré sur fig. 173).

12.14. Les variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi se séparent en coordonnées elliptiques (voir [1], § 48, problème 2 pour

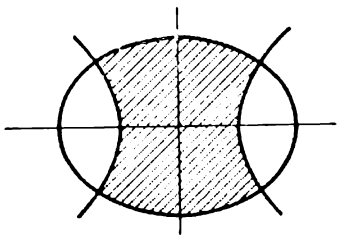


Fig. 173

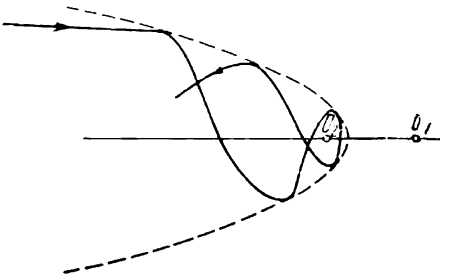


Fig. 174

$\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$). Pour une particule lancée de l'infini sur l'axe z la constante $\beta = -2mE\rho^2 + 4m\alpha\sigma$, où ρ est le paramètre d'impact.

Pour $\beta < 0$ la trajectoire ne diffère pas qualitativement de celle de la particule diffusée dans le champ d'un dipôle ponctuel (voir problème 12.6 b).

Pour $\beta > 0$ la particule chute sur le dipôle (c'est-à-dire traverse dans son mouvement le tronçon O_1O_2), puis repart à l'infini. Si, de plus, $p_\eta(\eta_1) = 0$ quand $\eta_1 < 0$, la particule parcourt une région limitée par l'hyperbole $\eta = \eta_1$ (fig. 174).

12.15. Dans l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{e}{2c}\mathscr{H}(z)\,r\right)^2\right] = 0 \qquad (1)$$

c'est le temps et l'angle φ qui se séparent :

$$S = -Et + p_\varphi\varphi + \widetilde{S}(r, z). \qquad (2)$$

En n'étudiant, ensuite, que les trajectoires coupant l'axe z, posons $p_\varphi = 0$. Comme on n'arrive pas à séparer les variables r et z dans

l'équation, on recherchera son intégrale de façon approchée sous forme de développement en r:

$$\tilde{S}(r, z) = S_0(z) + r\psi(z) + \frac{r^2}{2}\sigma(z) + \ldots \tag{3}$$

Comme l'impulsion radiale

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \psi(z) + r\sigma(z) + \ldots \tag{4}$$

de la particule lancée sur l'axe z (pour $r = 0$) est nulle, on a pour le faisceau de particules étudiées $\psi(z) = 0$. En portant (3) dans (1) et en égalant les coefficients des r de même puissance, il vient (comp. avec [2], § 56, problème 2)

$$S_0(z) = pz, \tag{5}$$

$$p\sigma'(z) + \sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2}\mathscr{H}^2(z) = 0. \tag{6}$$

En dehors de la lentille (pour $|z| > a$, $\mathscr{H}(z) = 0$), il s'ensuit de (6) que

$$\sigma(z) = \frac{p}{z + C_1} \quad \text{pour } z < -a, \tag{7}$$

$$\sigma(z) = \frac{p}{z + C_2} \quad \text{pour } z > a. \tag{8}$$

Les équations des trajectoires

$$\frac{\partial S}{\partial C_{1,2}} = -\frac{pr^2}{2(z + C_{1,2})^2} = B_{1,2} \tag{9}$$

sont les équations des droites coupant l'axe z aux points $-C_{1,2}$ *), c'est-à-dire $z_0 = -C_1$, $z_1 = -C_2$. De (6), il vient

$$p\sigma(a) - p\sigma(-a) + \int_{-a}^{a} \sigma^2\, dz + \frac{e^2}{4c^2}\int_{-a}^{a} \mathscr{H}^2(z)\, dz = 0. \tag{10}$$

Puisque $|z_{0,1}| \gg a$, il s'ensuit de (7), (8) que

$$\sigma(\pm a) = -\frac{p}{z_{1,0}}. \tag{11}$$

Evaluons $\int_{-a}^{a} \sigma^2\, dz$. Selon (6) $\sigma(z)$ est une fonction monotone. Donc

$$\int_{-a}^{a} \sigma^2\, dz \leqslant \frac{2ap^2}{z_{1,0}^2} \ll p\sigma(\pm a).$$

*) Avec z voisins de $C_{1,2}$, $\sigma \to \infty$, de sorte que le développement de (3) n'est plus applicable. Cependant, les équations des trajectoires (9) restent vraies dans ce domaine.

Il vient donc de (10) que

$$\frac{1}{|z_0|}+\frac{1}{z_1}=\frac{e^2}{4c^2p^2}\int_{-a}^{a}\mathscr{H}^2(z)\,dz=\frac{1}{f}. \tag{12}$$

La condition $|z_{0,1}|\gg a$ est en fait remplie si $a\ll\frac{cp}{e\mathscr{H}}$.

12.16. Les points de focalisation sont:

$$\varkappa z_n=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\varkappa z_0+\frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

Suivant la grandeur de $\lambda^2=1+(e\mathfrak{H}/2c\varkappa p)^2$, on obtient un ou plusieurs points de focalisation.

12.17.

$$S(q,q_0,t,t_0)=f(q,\alpha(q,q_0,t,t_0),t)-f(q_0,\alpha(q,q_0,t,t_0),t_0),$$

où $f(q,\alpha,t)$ est l'intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi, tandis que la dépendance $\alpha(q,q_0,t,t_0)$ est déterminée par l'équation (le système d'équations au cas de plusieurs degrés de liberté)

$$\frac{\partial f(q,\alpha,t)}{\partial\alpha}=\frac{\partial f(q_0,\alpha,t_0)}{\partial\alpha}.$$

§ 13. Invariants adiabatiques

13.1. $E^2l=\text{const}$.

13.2. La figure 175, *c* fournit le graphique $I=vl$. La grandeur vl oscille autour d'une valeur à peu près constante $\langle vl\rangle$, l'amplitude des oscillations présentant une valeur relative $\frac{\Delta I}{I}\sim\frac{\dot{l}}{v}$. L'écartement de $\langle vl\rangle$ de la valeur constante est de l'ordre de petitesse supérieur

$$\frac{d}{dt}\langle vl\rangle\sim\dot{l}^2.$$

13.3. $h\sim g^{-1/3}$.

13.4. a) $E=-A\left(1-\frac{\alpha I}{\sqrt{2mA}}\right)^2$;

b) $E=-U_0\left(1-\frac{\alpha I}{\sqrt{2mU_0}}\right)$;

c) $E=\alpha I\sqrt{\frac{2U_0}{m}}+\frac{\alpha I^2}{2m}$;

d) $E=\left[\sqrt{\frac{\pi}{2m}}\frac{I}{2}A^{1/n}\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{2n}{n+2}}$.

13.5. $h \sim \sin^{2/3} \alpha$.

13.6. $a \sim \sin^{-1/4} \alpha$.

13.7. $I = \frac{8ml\sqrt{gl}}{\pi}\left[E\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) - \cos^2\frac{\varphi_0}{2} K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)\right]$.

13.8. Désignons par x et X les coordonnées des particules m et M lues à partir du point O. Le mouvement de la particule légère peut être assimilé de façon approchée à un mouvement s'effectuant entre deux murs dont l'un est mobile. La condition

$$|\dot{x}| \gg |\dot{X}| \qquad (1)$$

étant remplie, le produit moyen sur la période $|\dot{x}|\, X = C$ (voir problème 13.2) reste en valeur. En éliminant $\dot{x}$ de la loi de conservation de l'énergie

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{M\dot{X}^2}{2} = E,$$

on trouve que l'influence de la particule légère sur le mouvement de la particule lourde équivaut à l'apparition de l'énergie potentielle $U(X) = \frac{mC^2}{2X^2}$. De l'équation $\frac{M\dot{X}^2}{2} + U(X) = E$ on tire la loi de mouvement $X = \sqrt{\frac{mC^2}{2E} + \frac{2E}{M}(t-\tau)^2}$. Les constantes E, C et τ peuvent être définies sur la base des valeurs initiales X, $\dot{X}$ et $\dot{x}$ (indépendantes de $x(0)$). Au cas où la condition (1) cesse d'être satisfaite, la résolution proposée est inapplicable.

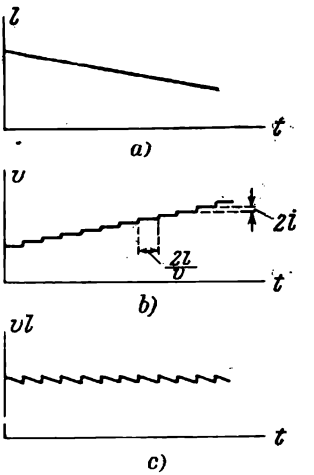


Fig. 175

Cette approximation (dite adiabatique) est d'une large application, par exemple, dans la théorie des molécules.

13.9. Désignons les coordonnées des particules lourdes par $X_{1,2}$ et de la particule légère par x. Pour $X_1 < x < X_2$ l'énergie potentielle est

$$U = (x - X_1) f + (X_2 - x) f = (X_2 - X_1) f.$$

Aussi la particule légère se déplace-t-elle librement entre les lourdes et on a $|\dot{x}|(X_2 - X_1) = C = \text{const}$ (voir problème précédent). Ce fait pris en compte, on tire de la loi de conservation de l'énergie, appliquée au mouvement relatif des particules lourdes, que

$$\frac{M}{4}\dot{X}^2 + \frac{mC^2}{2X^2} + fX = E.$$

En décomposant $U_{\text{eff}}(X) = \frac{mC^2}{2X^2} + fX$ au voisinage de $X_0 = (mC^2/f)^{1/3}$, on obtient la pulsation des petites oscillations de l'« ion »

$$\omega^2 = \frac{2U''(X_0)}{M} = \frac{6f}{MX_0}.$$

13.10. Dans les équations pour P et Q

$$\dot{Q} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\sin 2Q, \quad \dot{P} = -P\frac{\dot{\omega}}{\omega}\cos 2Q$$

développons la pulsation en série par rapport à t. En se limitant aux corrections du premier ordre, on obtient

$$Q = (\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}\dot{\omega}_0 t^2 + \frac{\dot{\omega}_0}{2\omega_0}\int_0^t \sin 2Q(t)\,dt, \qquad (1)$$

$$P = P_0\left(1 - \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0}\int_0^t \cos 2Q\,dt\right), \qquad (2)$$

où ω_0 et $\dot{\omega}_0$ sont les valeurs de la pulsation et de sa dérivée à l'instant $t_0 = 0$, de plus $\dot{\omega}_0 = \varepsilon^2\omega_0^2$ et $\varepsilon \ll 1$.

La phase Q et l'amplitude $A = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}}$ du mouvement perturbé diffèrent relativement peu de leurs valeurs non perturbées $Q_0 = \omega_0 t + \varphi$ et $A_0 = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}}$ même pour des laps de temps beaucoup plus grands que la période des oscillations $2\pi/\omega$ (fig. 176).

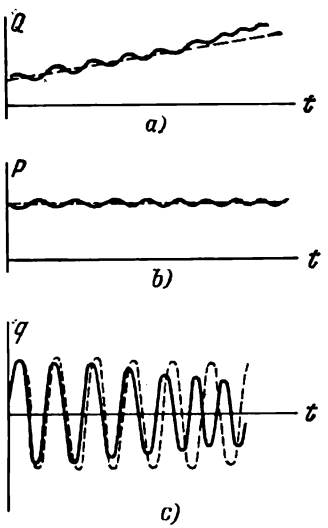


Fig. 176

Etant donné que pour les instants $t \sim 1/\varepsilon\omega_0$ le second terme de (1) est de l'ordre de l'unité et le troisième de l'ordre de ε, il s'avère que

$$Q = \omega_0 t + \varphi + \frac{1}{2}\dot{\omega}_0 t^2, \quad P = P_0.$$

Mais une telle variation de phase impliquera qu'en variables p, q le mouvement perturbé

$$q(t) = A_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{1}{2}\dot{\omega}_0 t^2\right)$$

différera sensiblement du mouvement non perturbé

$$q_0(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

de sorte que la différence

$$q(t) - q_0(t) \sim q_0(t).$$

En tâchant de construire la théorie des perturbations pour les variables q et p, on obtient en guise de correction du premier ordre $q_1(t)$ l'équation

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = -2\omega_0\dot{\omega}_0 t A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec une force de résonance croissant dans le temps. Aussi la solution obtenue dans une telle théorie n'est-elle vraie que pour des petits laps de temps de l'ordre de quelques périodes d'oscillations

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \frac{1}{\varepsilon\omega_0}.$$

13.12. $I(t) = I(0) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega^2}\int_0^t F(t)\sin\omega t\,dt - \frac{1}{\omega}\left[x(0) - \frac{F(0)}{m\omega^2}\right] \times$

$$\times \int_0^t \dot{F}(t)\cos\omega t\,dt + \frac{1}{2m\omega}\left|\int_0^t \dot{F}(t)\,e^{i\omega t}\,dt\right|^2.$$

Donc si la force varie lentement, $I(t)$ oscille près de $I(0)$. Si $F(t) \to \text{const}$ pour $t \to \infty$, la variation complète de l'invariant adiabatique $I(\infty) - I(0)$ peut être très petite (voir problème 5.18).

13.13. $PV^{5/3} = \text{const}$.

13.14. a) $E = \frac{\pi^2}{2m}\left(\frac{I_1^2}{a^2} + \frac{I_2^2}{b^2} + \frac{I_3^2}{c^2}\right)$, où a, b, c sont les longueurs des arêtes du parallélépipède, tandis que $I_k = \text{const}$. Les valeurs absolues des projections de la vitesse sur chacune des arêtes se conservent.

13.15. Les variables se séparent en coordonnées sphériques. Le moment cinétique **M** se conserve rigoureusement (M_z est en outre un invariant adiabatique correspondant à l'angle φ). L'invariant adiabatique du mouvement radial est

$$I_r = \frac{1}{\pi}\int_{r_{\min}}^{R} \sqrt{2mE - \frac{M^2}{r^2}}\,dr. \qquad (1)$$

La dépendance de $E(R)$ peut être obtenue sans le calcul de l'intégrale (1). La substitution $r = Rx$ donne

$$I_r = \frac{1}{\pi}\int_{x_{\min}}^{1} \sqrt{2mER^2 - \frac{M^2}{x^2}}\,dx = I_r(ER^2, M), \qquad (2)$$

d'où il s'ensuit que $ER^2 = \text{const}$. Aussi pour l'angle d'incidence on a

$$\sin\alpha = \frac{r_{\min}}{R} = \frac{M}{\sqrt{2mE}\,R} = \text{const}.$$

13.16. a) $E \sim \gamma^{\frac{2}{2-n}}$; b) $E \sim \gamma^{-1}$.

13.17. $$\delta E = \langle \delta U \rangle = \frac{2}{T}\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\delta U\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{M^2}{2mr^2} - U\right)}}.$$

13.18. $E = I_1\Omega_1 + I_2\Omega_2$ (notations du problème 6.5 a). La trajectoire remplit le rectangle $|Q_1| \leqslant \sqrt{I_1\Omega_1^{-1}}$, $|Q_2| \leqslant \sqrt{I_2\Omega_2^{-1}}$.

Les conditions de l'applicabilité de la théorie des invariants adiabatiques sont :

$$\dot{\Omega}_i \ll \Omega_i^2, \quad \ddot{\Omega}_i \ll \Omega_i\dot{\Omega}_i \quad (i = 1, 2).$$

En dehors de la région de dégénérescence ces conditions se ramènent aux mêmes conditions que celles imposées à $\omega_1(t)$. Dans la région de dégénérescence ($|\omega_1^2 - \omega_2^2| \sim \alpha$) la seconde condition s'avère plus rigoureuse et fournit $\dot{\omega}_1 \ll \alpha$ (la région de dégénérescence est traversée en un temps beaucoup plus grand que la période des battements).

13.19. En l'absence de la liaison αxy le système se scinde en deux oscillateurs indépendants de coordonnées x et y. Les invariants adiabatiques correspondants sont $I_x = \frac{E_x}{\omega_1}$, $I_y = \frac{E_y}{\omega_2}$, où E_x et E_y sont les énergies de ces oscillateurs.

Si l'on tient compte de la liaison, le système peut être ramené à deux oscillateurs indépendants de coordonnées Q_1 et Q_2. Si la fréquence varie de façon suffisamment lente, les égalités

$$I_1 = \frac{E_1}{\Omega_1} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{E_2}{\Omega_2}$$

se conservent.

A l'extérieur du domaine de dégénérescence les oscillations naturelles sont très localisées, à savoir, pour $\omega_1 < \omega_2$ $Q_1 = x$, $Q_2 = y$, tandis que pour $\omega_1 > \omega_2$ $Q_1 = +y$, $Q_2 = -x$. Il s'avère donc que pour $\omega_1 < \omega_2$ $I_x = I_1$, $I_y = I_2$, tandis que pour $\omega_2 < \omega_1$, on a, au contraire, $I_x = I_2$ et $I_y = I_1$ (fig. 177).

Donnons en une illustration en recourant à l'exemple suivant. Deux pendules, dont l'une des longueurs peut varier, sont liés par un ressort de faible rigidité (fig. 178). Au cas d'une importante différence entre les longueurs des pendules l et L les oscillations naturelles coïncident à peu près avec les oscillations de l'un des deux pendules.

Supposons qu'à l'origine le pendule AB oscille avec une amplitude φ_0, l'amplitude du pendule CD demeurant très petite. L diminuant, l'amplitude des oscillations du pendule CD reste petite, tant que sa longueur ne s'égalise à l. Pour $L \approx l$ son amplitude grandit $\left(\text{et pour } l = L \text{ les deux pendules oscilleront en opposition de phase avec des amplitudes égales valant } \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}\right)$. Si L continue à diminuer, on

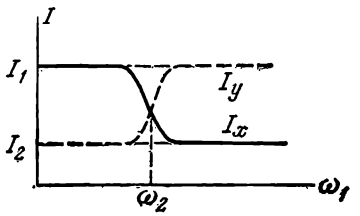


Fig. 177

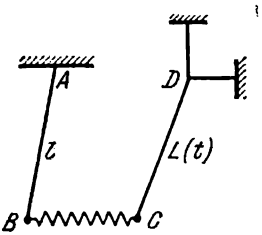


Fig. 178

constate que presque toute l'énergie passe au pendule CD, son amplitude devenant égale à $\varphi_1 = \varphi_0\left(\frac{l}{L}\right)^{3/4}$, comme dans le cas de pendule isolé.

Avec la traversée relativement rapide de la région de dégénérescence $\dot{\omega}_1 \gg \alpha$, il ne s'observe pas de tel pompage d'énergie entre les oscillateurs. Si, en outre, $\dot{\omega}_1 \ll \omega_1^2$, $\ddot{\omega}_1 \ll \omega_1\dot{\omega}_1$, I_x et I_y se conservent.

13.20. Des équations de mouvement

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + 2\beta xy = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y + \beta x^2 = 0 \tag{2}$$

il est aisé de déduire que la liaison des oscillateurs implique un sensible transfert d'énergie au cas où $2\omega_1 \approx \omega_2$.

Soit $x = a(t)\cos(\omega_1 t + \varphi)$, $y = b(t)\cos(\omega_2 t + \psi)$. Si $a \gg b$, le terme $\beta x^2 = \frac{1}{2}\beta a^2 + \frac{1}{2}\beta a^2 \cos(2\omega_1 + 2\varphi)$ joue dans (2) le rôle de force imposée entraînant l'accroissement de résonance de y. Si, par contre, $a \ll b$, le terme $2\beta xy = 2\beta bx\cos(\omega_2 t + \psi)$ conduit dans (1) à l'intensification paramétrique d'oscillations x. L'étude détaillée des systèmes (1) et (2) est faite dans le problème 8.10.

Le domaine d'interaction de résonance est: $|2\omega_1 - \omega_2| \lesssim \beta b\omega_1^{-1}$.

Une forte interaction de résonance des oscillateurs a généralement lieu pour $n\omega_1 = m\omega_2$, où n et m sont des entiers. Toutefois, les gammes de fréquences où s'observent ces résonances pour des n et m

suffisamment grands sont très petites (voir [1], § 29). Aussi est-il possible de négliger leur action sur le mouvement des oscillateurs quand $\dot{\omega}_1$ ne sont pas trop petits (bien que suffisamment petits pour pouvoir recourir à la théorie des invariants adiabatiques).

13.21. Soit une particule se mouvant dans le plan xy sous un petit angle par rapport à l'axe y ($|\dot{x}| \ll |\dot{y}|$) et qui se réfléchit sur l'axe x et sur la courbe $y_0(x)$ (fig. 179).

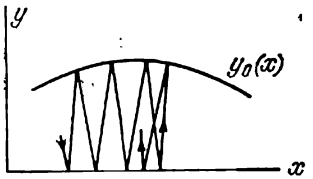


Fig. 179

Si l'on admet que la loi de mouvement dans la direction de l'axe x est connue, on peut alors étudier le mouvement dans la direction de l'axe y en assimilant $x(t)$ à un paramètre variant lentement. L'invariant adiabatique $\oint p_y dy = 2|p_y| y_0(x) = 2\pi I$ se conserve, cette égalité déterminant la dépendance $p_y(x)$.

Pour déterminer $x(t)$, on peut recourir à la loi de conservation de l'énergie $m^2\dot{x}^2 + p_y^2(x) = 2mE$. La distance minimale $x_{\min}$ se détermine à partir de la condition $p_y^2(x_{\min}) = 2mE$. En portant $y_0(x) = x \operatorname{tg} \alpha$, $2\pi I = 2\sqrt{2mE}\, l \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_0$, il vient $x_{\min} = l \cos \varphi_0$.

La résolution du problème par la méthode des réflexions est visualisée de façon évidente sur la figure 180. Cette méthode fournit

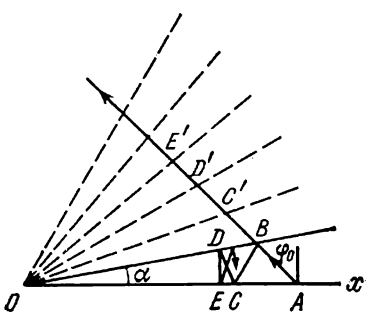


Fig. 180

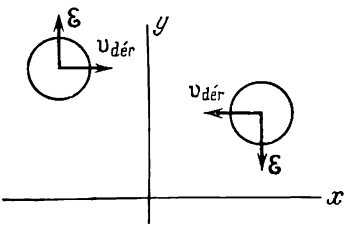


Fig. 181

une solution précise convenant pour tous angles α et φ_0, toutefois, elle ne peut être étendue au cas où $y_0(x)$ n'est pas une droite.

13.22. $\operatorname{tg} \alpha x_m = \operatorname{tg} \varphi$, $T = \dfrac{2\pi}{\alpha v \sqrt{\cos 2\varphi}}$.

13.23. a) Le problème du mouvement de la particule dans un champ magnétique au cas du choix mentionné du potentiel vecteur se ramène au problème du mouvement de l'oscillateur harmonique

(voir problème 10.7). L'invariant adiabatique est

$$I = \frac{E - p_z^2/2m}{\omega} \backsim \frac{v_\perp^2}{\mathcal{H}} \backsim \pi a^2 \mathcal{H},$$

où $a = \frac{cmv_\perp}{e\mathcal{H}}$ est le rayon de l'orbite de la particule (voir [2], § 21).

La relation $I \backsim \pi a^2 \mathcal{H}$ autorise une interprétation simple: le rayon de l'orbite varie de façon que le flux du champ magnétique à travers l'élément de surface qui l'entoure demeure constant. La distance séparant le centre de l'orbite du plan yz vaut $x_0 = \frac{cp_y}{e\mathcal{H}}$ et diminue avec l'accroissement de $\mathcal{H}$.

L'amorçage de la dérive des orbites est en relation avec l'apparition du champ électrique $\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = (0, -\frac{1}{c}, x\dot{\mathcal{H}}, 0)$ engendrée par la variation du champ magnétique (comp. avec [2], § 22).

Les vecteurs du champ électrique $\mathcal{E}$ et de la vitesse $\mathbf{v}_{\text{dér}}$ pour les positions variées de l'orbite de la particule sont donnés sur la figure 181.

b) La fonction de Hamilton en coordonnées cylindriques est:

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c} r^2\right)^2,$$

p_z et p_φ sont les intégrales de mouvement.

L'invariant adiabatique du mouvement radial

$$\pi I_r = \int_{r_{\max}}^{r_{\min}} \sqrt{2mE_\perp - \frac{1}{r^2}\left(p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c} r^2\right)^2}\, dr$$

après la substitution $r = \mathcal{H}^{-1/2}\zeta$ prend la forme

$$\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \sqrt{2mE_\perp \mathcal{H}^{-1} - \frac{1}{\zeta^2}\left(p_\varphi - \frac{e}{2c}\zeta^2\right)^2}\, d\zeta = \pi I_r\left(p_\varphi, \frac{E_\perp}{\mathcal{H}}\right)^{*)}.$$

Donc $E_\perp/\mathcal{H} = \text{const}$, c'est-à-dire que l'énergie du mouvement transversal varie de la même façon qu'au point a). La distance du centre de l'orbite de l'origine des coordonnées est

$$r_0 = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{\zeta_{\max} + \zeta_{\min}}{2\sqrt{\mathcal{H}}} \backsim \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}.$$

*) Il est remarquable que I_r est en fait indépendant de p_φ quand $p_\varphi > 0$. En effet, $\frac{\partial I_r}{\partial p_\varphi}$ est la variation de l'angle $\Delta\varphi$ durant une oscillation radiale, tandis que pour $p_\varphi > 0$ l'origine des coordonnées est située en dehors de la trajectoire (voir fig. 98, *b*) et, par suite, $\Delta\varphi = 0$.

Avec l'accroissement de $\mathscr{H}$ le centre de l'orbite se rapproche de l'origine des coordonnées (fig. 182).

Avec la variation de $\mathscr{H}$ un champ électrique est amorcé

$$\mathscr{E}_\varphi = -\frac{r}{2c}\dot{\mathscr{H}}, \quad \mathscr{E}_r = \mathscr{E}_z = 0,$$

dont les lignes de force constituent des cercles fermés.

Dans des conditions réelles un champ magnétique uniforme ne peut se créer que dans un domaine limité de l'espace. Le champ électrique amorcé avec la variation du champ magnétique dépend forte-

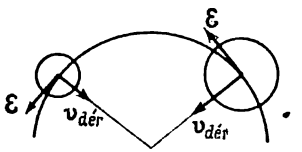


Fig. 182

ment de la forme de ce domaine et des conditions à sa frontière (voir [2], § 21). Par exemple, le champ étudié au point a) se crée au voisinage du plan conducteur de courant, au cas de b) au sein d'un solénoïde *).

La forte dépendance de la nature du mouvement de la particule du champ $\mathfrak{E}$ peu intense, même au cas de $\dot{\mathfrak{H}}$ infiniment petits, est due à la dégénérescence (au cas de $\mathfrak{H}$ = const les périodes de mouvement suivant les deux coordonnées x, y ou r, φ coïncident).

Notons que la quantité $E_\perp/\mathscr{H}$ est l'invariant adiabatique dans les deux cas. On peut montrer que ce résultat est indépendant du choix de **A** (voir [2], § 21 ; [8], § 25).

13.24. Après avoir choisi le potentiel vecteur sous la forme

$$A_\varphi = \frac{r}{2}\mathscr{H}(t), \quad A_r = A_z = 0, \tag{1}$$

on obtient les invariants adiabatiques

$$I_z = \frac{E_z}{\omega}, \quad I_\varphi = p_\varphi,$$

$$I_r = \frac{1}{\pi}\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \sqrt{C\zeta^2 - p_\varphi^2 - m^2\zeta^4}\,\frac{d\zeta}{\zeta} = I_r(p_\varphi, C), \tag{2}$$

*) La variation du champ électrique reliée à celle du choix de **A** ne s'observerait pas si, simultanément, on avait modifié le potentiel scalaire de la grandeur $\frac{1}{2c}\dot{\mathscr{H}}xy$ (transformation de jauge).

où

$$C = \frac{2mE_\perp + e\mathcal{H}p_\varphi/c}{\sqrt{\omega^2 + (e\mathcal{H}/mc)^2}}.$$

Donc

$$E_z \sim \omega, \; E_\perp + \frac{e\mathcal{H}}{2mc} p_\varphi \sim \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{e\mathcal{H}}{2mc}\right)^2}. \tag{3}$$

Le potentiel vecteur (1) définit le champ magnétique symétrique par rapport à l'axe z passant par le centre de l'oscillateur.

Pour un autre choix de **A**

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = x\mathcal{H}(t) \tag{4}$$

on est en fait mis en présence d'un autre problème physique. Les fonctions de Lagrange dans ces deux problèmes diffèrent de

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{2c}\mathcal{H}xy\right) - \frac{e}{2c}\dot{\mathcal{H}}xy, \tag{5}$$

autrement dit, cette différence, si l'on élimine dans (5) la dérivée totale par rapport au temps négligeable, est très petite.

Dans le problème précédent, où le mouvement était dégénéré, c'est justement l'apparition de cette adjonction qui a entraîné une variation radicale de la direction et de la vitesse de la dérive de l'orbite. Dans le cas considéré le mouvement de l'oscillateur pour $\mathcal{H}$ = const n'est pas dégénéré et l'adjonction peut être laissée de côté (comp. avec problème 13.19). Aussi les relations (3) sont-elles valables également pour un autre choix de A. Avec la traversée du domaine de dégénérescence ($\mathcal{H} = 0$) les relations (3) ne jouent que pour un champ à symétrie axiale (1). Le comportement de l'oscillateur, par exemple, dans le champ (4) au cours du passage de $\mathcal{H}$ par la valeur zéro exige par contre des études complémentaires.

13.25. a) A l'aide de transformations canoniques on peut réduire la fonction de Hamilton à une somme de deux oscillateurs indépendants (pour X, Y ; voir problème 11.9). Les invariants adiabatiques sont les rapports de l'énergie de chacun de ces oscillateurs à leurs pulsations.

Rappelons que les oscillations de chacun d'eux constituent des mouvements sur une ellipse (voir problème 6.36). Exprimés, par exemple, en fonction de l'amplitude d'oscillations a_k suivant l'axe x, les invariants adiabatiques valent :

$$I_k = \frac{ma_k^2}{2\Omega_k} \frac{\Omega_k^4 - \omega_1^2\omega_2^2 + \Omega_k^2\omega^2\mathcal{H}}{\Omega_k^2 - \omega_2^2} \quad (k = 1, 2).$$

Après changement des paramètres du système à la nouvelle fonction de Hamilton s'ajoute aussi une dérivée partielle de la fonction

génératrice par rapport au temps valant *) $\dot{\lambda}\,(m\omega_2 XY + P_X P_Y/m\omega_2)$. Cet appoint est faible ($\dot{\lambda} \ll \Omega_k$) et on peut ne pas en tenir compte à moins que les pulsations propres ne coïncident (comp. avec problème 13.19). Le cas de dégénérescence pour $\omega_1 = \omega_2$ et un champ magnétique s'annulant exige des études spéciales.

Pour un autre choix du potentiel vecteur conduisant au même champ magnétique mais un champ électrique différent $\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ les invariants adiabatiques s'avèrent les mêmes (toujours à l'exception du cas $\omega_1 = \omega_2$, $\mathfrak{H} = 0$).

Si $\omega_1 = \omega_2$, un autre choix d'invariants adiabatiques s'avère également possible (voir problème précédent).

b) Soit pour plus de netteté $\omega_1 > \omega_2$. Le mouvement s'effectue sur un cercle de rayon $a\sqrt{\frac{\omega_1}{2\omega_{\mathcal{H}}}}$ à la pulsation $\omega_{\mathcal{H}}$, quant au centre de l'ellipse il se déplace sur une ellipse aux demi-axes parallèles aux axes x et y et valant

$$\frac{b\omega_2\sqrt{\omega_{\mathcal{H}}}}{\sqrt{\omega_1(\omega_1^2+\omega_2^2)}} \quad \text{et} \quad \frac{b\sqrt{\omega_1\omega_{\mathcal{H}}}}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}},$$

dont la pulsation est $\omega_1\omega_2/\omega_{\mathcal{H}}$.

c) Les oscillations s'effectueront presque sur l'axe y ; son amplitude croîtra $\sqrt{\omega_1/\omega_2}$ fois (comp. avec problème 13.19).

13.27. a) Le mouvement de la particule dans le plan xy se réalise sous l'effet d'un champ magnétique (par suite d'un déplacement suivant l'axe z) variant lentement. Dans ce cas l'invariant adiabatique $I_\perp = E_\perp/\frac{e\mathcal{H}(z)}{mc}$ se conserve (voir problème 13.23). De la loi de conservation de l'énergie on tire

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} + I_\perp \frac{e\mathcal{H}(z)}{mc} = E.$$

La particule se meut en direction de l'axe z, de façon identique à son déplacement dans le champ potentiel $U(z) = I_\perp \frac{e\mathcal{H}(z)}{mc}$. La période

*) Le calcul de la dérivée partielle d'une fonction génératrice peut être simplifié sur la base de considérations suivantes.

En passant de l'instant t à l'instant $t + \delta t$ il faut procéder à une transformation canonique supplémentaire correspondant à la transition de λ à $\lambda + \delta\lambda$. Cette transformation est définie par la fonction génératrice $\Phi(X, Y, P'_X, P'_Y) = XP'_X + YP'_K + \delta\dot{\lambda}\,(m\omega_2 XY + P'_X P'_Y/m\omega_2)$ (voir problème 11.17). Donc $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{\delta\lambda\to 0} = \dot{\lambda}\,(m\omega^2 XY + P_X P_Y/m\omega_2)$.

d'oscillations (comp. avec problème 2b de [1], § 11) est

$$T = \frac{2\pi a}{v\sqrt{\lambda \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}},$$

où α est l'angle entre la vitesse de la particule $\mathbf{v}$ et l'axe z engendré à l'origine des coordonnées. Les particules pour lesquelles $\operatorname{cotg}^2 \alpha > \lambda$ ne sont pas retenues dans le piège. La condition d'applicabilité de la théorie des invariants adiabatiques consiste dans la postulation que la variation du champ magnétique durant une révolution de la particule soit petite. Alors on a $mc\lambda v_z \ll ae\mathscr{H}_0$.

En guise d'exemple de piège magnétique on peut citer les ceintures de radiation de la Terre (pour plus de détails sur les pièges voir [29]).

b) $T = 2\pi a/v \sin \alpha$.

13.28. a) $(\lambda E_\perp - E_z)\, a^2 = \text{const}$, $E_\perp/\mathscr{H}_0 = \text{const}$, $E = E_\perp + E_z$;

b) $E_\perp/\mathscr{H}_0 = \text{const}$, $E_z \sqrt{\mathscr{H}_0}/a = \text{const}$.

13.29. En négligeant dans la fonction de Hamilton

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{e\mathscr{H} p_\varphi}{2cm} + \frac{e\mathscr{H}^2 r^2 \sin^2 \theta}{8mc^2}$$

le dernier terme quadratique en $\mathscr{H}$ on peut séparer les variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi.

Au cours d'une lente variation de $\mathscr{H}$ les grandeurs p_φ, β et $E + \frac{e\mathscr{H} p_\varphi}{2mc}$ demeurent constantes.

13.30. $$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E_1, \quad \frac{p_y^2}{2m} + 2m\omega^2 y^2 = E_2,$$

$$(m^2\omega^2 x^2 - p_x^2)\, y + x p_x p_y = A,$$

$$(m^2\omega^2 x^2 - p_x^2)\, p_y - 2m\omega x p_x y = \frac{1}{m}\{E_2, A\}.$$

Bibliographie

1. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика, «Наука», 1973.
2. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Теория поля, «Наука», 1973.
3. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
4. *H. Goldstein*, Classical mecanics, Cambridge, 1950.
5. *D. Ter Haar*, Elements of Hamiltonian mecanics, Oxford, 1971.
6. *В. И. Арнольд*, Математические методы классической механики, «Наука», 1974.
7. *Л. И. Мандельштам*, Лекции по теории колебаний, «Наука», 1972.
8. *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
9. *Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев*, Динамика неголономных систем, «Наука», 1967.
10. *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш*, Специальные функции, «Наука», 1964.
11. *N. Mott, H. Massey*, The theory of Atomic Collisions, Oxford, 1965.
12. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, «Наука», 1976.
13. *Р. Курант, Д. Гильберт*. Методы математической физики, Гостехиздат, 1951.
14. *Г. С. Горелик*, Колебания и волны, Физматгиз, 1959.
15. *Дж. В. Стрэтт* (лорд *Рэлей*), Теория звука, Т. I, гл. IV, Гостехиздат, 1940 (*J. W. Strutt* (lord *Rayleigh*), Theory of Sound).
16. *А. М. Бонч-Бруевич*, Радиоэлектроника в экспериментальной физике, «Наука», 1966.
17. *М. В. Волькенштейн, Л. А. Грибов, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов*, Колебания молекул, «Наука», 1972.
18. *Ch. Kittel*, Introduction to solid state physics, New-York, 1956.
19. *И. А. Кунин*, Теория упругих сред с микроструктурой, «Наука», 1975.
20. *J. P. den Hartog*, Mechanical vibrations, New-York, 1956.
21. *Э. Ферми*, Научные труды, т. I, стр. 440, «Наука», 1971.
22. *N. Blombergen*, Non linear Optics. A Lecture Note, New-York, 1965.

23. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Статистическая физика, гл. XIV, «Наука», 1976.

24. *F. Stacey*, Physics of the Earth, New-York, 1969.

25. *И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов*, Электронная теория металлов, «Наука», 1971.

26. *Д. И. Блохинцев*, Основы квантовой механики, «Высшая школа», 1961.

27. *А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов.* Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, «Наука», 1971.

28. *P. Calogero, O. Ragnisco*, Lettere al Nuovo Cimento, 13, 383 (1975).

29. *Л. А. Арцимович, С. Ю. Лукьянов*, Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, «Наука», 1972.

30. *М. Ш. Рывкин*, Доклады Академии наук, **221**, № 1 (1975).

31. *В. В. Соколов*, Ядерная физика, **23**, 628 (1976); **26**, 427 (1977).

À NOS LECTEURS

Les Éditions Mir seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:
2, Pervi Rijski péréoulok,

Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

THÉORIE DU CORPS SOLIDE

par A. DAVYDOV

C'est un ouvrage de base consacré à la théorie des différents types d'excitations collectives élémentaires (phonons, plasmons, magnons et excitons) qui apparaissent dans les corps solides et qui se manifestent dans différents effets physiques. Ce livre initie le lecteur à l'étude des principales méthodes mises en œuvre en théorie du solide pour décrire les phénomènes physiques qui s'y manifestent. L'exposé est basé sur l'appareil mathématique de la théorie quantique moderne, ce qui permet à l'auteur de traiter à un niveau convenable de toutes les questions importantes de la théorie du solide.

Destiné essentiellement aux étudiants des facultés de physique et des écoles d'ingénieurs, ce livre peut également être utile aux enseignants et aux travailleurs scientifiques.

À PARAÎTRE

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE

par I. IRODOV

Le manuel de I. Irodov, candidat ès sciences physiques et mathématiques, professeur à la chaire de Physique générale de l'Université de Moscou, traite des principes fondamentaux de la mécanique classique et relativiste, des lois du mouvement, des principes de la conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique. D'un contenu classique, mais présenté de façon moderne très claire et facilement assimilable, le manuel fait une large part aux applications pratiques. L'exposé est illustré d'un grand nombre d'exemples et de problèmes.

A l'usage des élèves des Facultés de spécialités physiques des universités et des écoles d'ingénieurs